



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Mechanika 3

Autor: Prof. Dr. Ing. Jan Dupal

Učební text vzniklý v rámci projektu

. CZ.1.07/2.2.00/15.0383

Plzeň 2012

Anotace

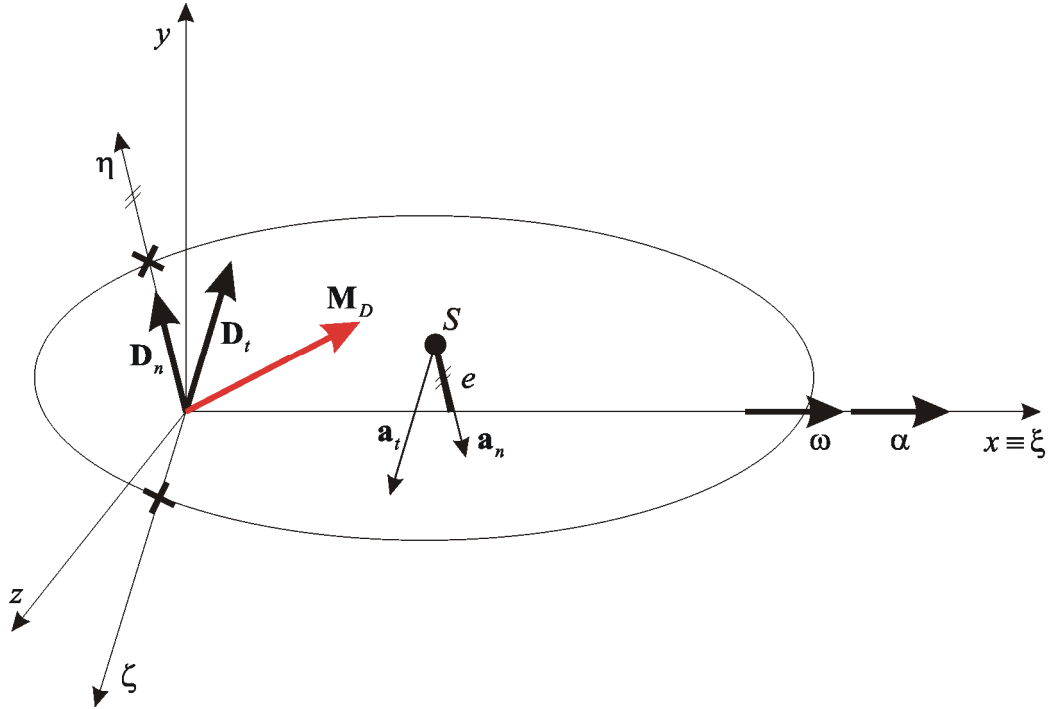
Předložený učební text je zpracován pro studenty Fakulty strojní a Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni. Mohou sloužit jako podklad pro předmět Mechanika 3, ale také i pro předměty Matematická teorie kmitání a Výpočtové metody mechaniky. Pro zvládnutí obsažené látky se předpokládá, že čtenář má základní znalosti z dynamiky hmotného bodu, dynamiky tuhého tělesa a kinematiky. Tento učební text obsahuje i některé speciální partie z problematiky rotačního a sférického pohybu, pro který byl použit duální popis pomocí Eulerových a Cardanových úhlů. Kapitola Základy analytické mechaniky obsahuje i některé povodní myšlenky zejména pro využití principu virtuálních posunutí pro systémy popsané vyjádřením po tem zobecněných souadnic není je po et stup volnosti. Výsledky tohoto přístupu jsou srovnávány s výsledky získanými aplikací Lagrangeových rovnic smíšeného typu. V celém učebním textu je striktně používán maticový zápis, a proto jsou kromě výše zmíněných znalostí od čtenáře také vyžadovány základní znalosti maticového počtu.

Obsah

Anotace	2
Obsah	3
1. Dynamika rotačního pohybu tělesa	4
2. Dynamika sférického pohybu tělesa	11
3. Obecný prostorový a rotační pohyb tělesa	34
4. Základy analytické mechaniky	42
4.1. Klasifikace mechanických soustav	42
4.2. Princip virtuálních prací (PVP)	46
4.2.1 Aplikace PVP pro soustavy popsané ídícími zobecněnými souadnicemi ($m=n$)	48
4.2.2 Aplikace PVP pro soustavy popsané zobecněnými souadnicemi ($m>n$)	51
4.3. Hamiltonův princip	54
4.4. Lagrangeovy rovnice II. druhu	56
4.5. Lagrangeovy rovnice smíšeného typu	57
4.6. Aplikace na Lagrangeovy rovnice II. druhu a smíšeného typu	59
5. Kmitání lineárních diskrétních soustav	64
5.1. Pohybová rovnice	64
5.2. Modální analýza	65
5.3. Volné kmitání slabě tlumených systémů s komutativní maticí tlumení	68
5.4. Vynucené kmitání slabě tlumených systémů s komutativní maticí tlumení	71
5.5. Odhad partikulárního řešení soustavy buzené harmonicky s využitím komplexního tvaru pohybové rovnice	74
Literatura	80

1. Dynamika rotačního pohybu tělesa

Na obr. 1.1 je znázorněno rotující těleso. Pevný souřadnicový systém je označen x, y, z , zatímco souřadnicový systém pevně spojený s rotujícím tělesem je označen ξ, η, ζ .



Obr. 1.1

Osa ξ , která je totožná s pevnou osou x , je osou rotace, se kterou jsou kolineární vektory úhlové rychlosti a úhlového zrychlení. Zavedeme-li konstantní matici setrvačnosti tělesa, musí být tato matice vyjádřena v souřadnicovém systému pevně spojeném s tělesem. V jiných souřadnicových systémech by matice setrvačnosti byla obecně funkcí času. V systému ξ, η, ζ má tato matice tvar

$$\mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} I_{\xi} & -D_{\xi\eta} & -D_{\xi\zeta} \\ -D_{\xi\eta} & I_{\eta} & -D_{\eta\zeta} \\ -D_{\xi\zeta} & -D_{\eta\zeta} & I_{\zeta} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Z dynamiky soustavy hmotných bodů a ze základní dynamiky tělesa víme, že moment hybnosti můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{L} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \quad (1.2)$$

kde $\boldsymbol{\omega} = [\omega, 0, 0]^T$ je vektor výsledné úhlové rychlosti. Zde je třeba si uvědomit, že oba inenty na pravé straně (1.2) jsou vyjádřeny v souřadnicovém systému ξ, η, ζ , i když vektor má v obou systémech stejné souřadnice. Hybnost tělesa můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{H} = m \mathbf{v}_S = m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_S, \quad (1.3)$$

kde \mathbf{v}_S je vektor rychlosti středu hmotnosti tělesa. Z obr. 1.1 je zřejmé, že vektor hybnosti s rotací stále má níže uvedený směr. Kinetickou energii můžeme vyjádřit podle známého vztahu

$$E_k = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{L}, \quad (1.4)$$

což lze s ohledem na (1.2) můžeme přepsat do tvaru

$$E_k = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{v}. \quad (1.5)$$

Setrvačné úinky působící na rotující těleso jsou tvořeny jednak setrvačnými silami \mathbf{D}_n a \mathbf{D}_t a jednak setrvačným momentem \mathbf{M}_D , viz obr. 1.1. Pro získání těchto veličin si připomeňme některé základní vztahy z dynamiky soustav hmotných bodů. První vztah je charakterizován 1. integrální vztahem o změně hybnosti v integrální resp. v diferenciální formě

$$\mathbf{H} - \mathbf{H}_0 = \int_0^t \mathbf{F} dt \quad \text{resp.} \quad \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{F}, \quad (1.6)$$

kde \mathbf{H} je celková hybnost soustavy hmotných bodů (v našem případě tělesa viz (1.3)) a \mathbf{F} je výslednice vnějších sil působících na těleso. Druhý vztah je charakterizován integrálním vztahem o změně momentu hybnosti v integrální resp. v diferenciální formě

$$\mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = \int_0^t \mathbf{M} dt, \quad \text{resp.} \quad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}, \quad (1.7)$$

kde \mathbf{L} je celkový moment hybnosti soustavy hmotných bodů (v našem případě tělesa viz (1.2)) a \mathbf{M} je výsledný moment vnějších sil a moment (Pokud působíme vnější síly do jediného bodu, je třeba připojit příslušné momenty podle základních vztahů statiky). Dále si připomeňme d'Alembertův princip, podle kterého jsou v rovnováze vnější a setrvačné úinky. To můžeme vyjádřit dvěma vztahy

$$\mathbf{F} + \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} + \mathbf{M}_D = \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

kde \mathbf{D} je výsledná setrvačná síla a \mathbf{M}_D je výsledná setrvačná dvojice (moment). S ohledem na (1.8) můžeme přepsat druhé vztahy v (1.6) a (1.7) do tvaru

$$\mathbf{D} = -\dot{\mathbf{H}}, \quad \mathbf{M}_D = -\dot{\mathbf{L}}, \quad (1.9)$$

pro tyto veličiny chápáné jako náhrada ve střední hmotnosti nebo v pevném bodě (v našem případě poátku souadnicového systému). Výslednou setrvačnou sílu dostaneme podle (1.9) s ohledem na (1.3) ve tvaru (hmotnost předpokládáme konstantní)

$$\mathbf{D} = -m \dot{\mathbf{v}}_S = -m(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t) = \mathbf{D}_n + \mathbf{D}_t, \quad (1.10)$$

kde

$$a_n = |\mathbf{a}_n| = e\omega^2, \quad \omega = \left| \dot{\boldsymbol{\varphi}} \right|, \quad (1.11)$$

resp.

$$a_t = |\mathbf{a}_t| = e\alpha, \quad \alpha = \left| \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \right|$$

jsou normální resp. tečné zrychlení střední hmotnosti tělesa a

$$\boxed{\mathbf{D}_n = -m\mathbf{a}_n, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{D}_t = -m\mathbf{a}_t} \quad (1.12)$$

je příslušná normální resp. tečná setrvačná síla. Znovu připomeňme, že obě setrvačné síly působí v poátku souadnicového systému. Směr setrvačných sil je zřejmý z obr. 1.1. Nyní se

vra me k druhému ze vztah (1.9), podle kterého vyjádíme setrvačný moment. Podle tohoto vztahu dostaneme vektor setrvačného momentu derivací momentu hybnosti podle α . Je však třeba si uvědomit, že tato derivace musí probíhat ve stacionárním souadnicovém systému. Vzhledem k faktu, že moment hybnosti (1.2) je vyjádřen v souadnicovém systému pevně spojeném s rotujícím tělesem, přepíšeme druhý ze vztah (1.9) do tvaru

$$\mathbf{M}_D = -\dot{\mathbf{L}} = -\dot{\mathbf{L}}|_{\xi\eta\zeta} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}, \quad (1.13)$$

$-\dot{\mathbf{L}}|_{\xi\eta\zeta}$ vyjaduje derivaci momentu hybnosti vyjádřeného v rotujícím souadnicovém systému $\xi\eta\zeta$ podle α . Tento vztah vysvětlíme nejjednodušším způsobem asi takto: Vektor \mathbf{a} vyjádíme pomocí souadnic pevného souadnicového systému xyz popsáného bází $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ a pomocí souadnic rotujícího souadnicového systému $\xi\eta\zeta$ popsáného bází $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.14)$$

Jestliže obě strany poslední rovnice derivujeme podle α a uvažujeme-li si, že bázové vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou konstantní, dostaneme

$$\dot{a}_x \mathbf{i} + \dot{a}_y \mathbf{j} + \dot{a}_z \mathbf{k} = \dot{a}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{a}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{a}_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.15)$$

α -ovou derivaci jednotkových vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ dostaneme vzhledem k jejich konstantní velikosti podle jednoduchých vztah

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.16)$$

z nichž po dosazení do (1.15) plyne

$$\dot{a}_x \mathbf{i} + \dot{a}_y \mathbf{j} + \dot{a}_z \mathbf{k} = \dot{a}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{a}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{a}_3 \mathbf{e}_3 + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3)}_{\mathbf{a}}. \quad (1.17)$$

Vztah (1.17) pak snadno přepíšeme do maticového tvaru

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}|_{\xi\eta\zeta} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \quad (1.18)$$

který dokazuje platnost (1.13). Dosadíme-li do (1.13) z (1.2) dostaneme

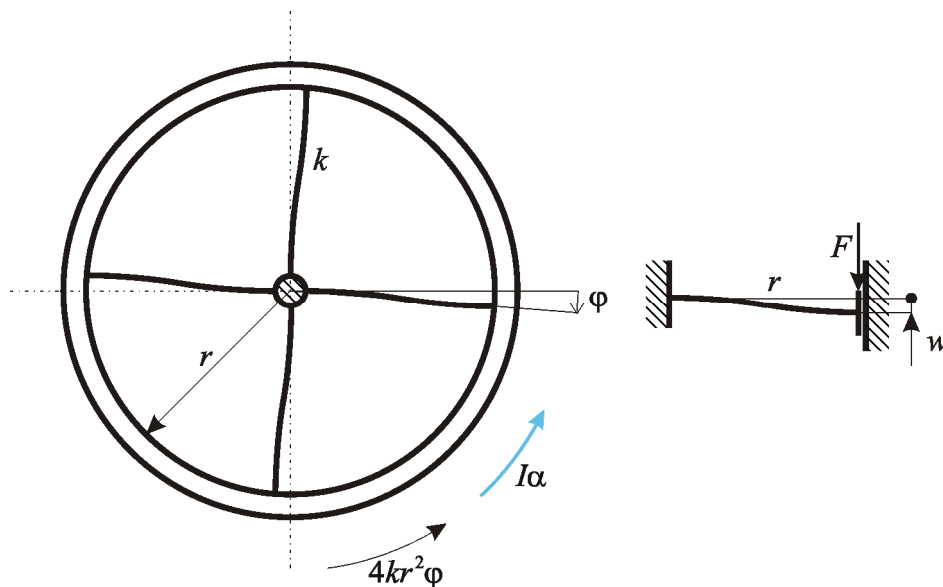
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} I_\xi \omega \\ -D_{\xi\eta} \omega \\ -D_{\xi\zeta} \omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} -I_\xi \alpha \\ D_{\xi\eta} \alpha \\ D_{\xi\zeta} \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ D_{\xi\zeta} \omega^2 \\ -D_{\xi\eta} \omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_\xi \alpha \\ D_{\xi\eta} \alpha - D_{\xi\zeta} \omega^2 \\ D_{\xi\zeta} \alpha + D_{\xi\eta} \omega^2 \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Příklady na rotační pohyb

Příklad 1.1

Na obr. 1.2. je znázorněna obruč ve tvaru kružnice o poloměru r , která má hmotnost m . Tato obruč je spojena se základem čtyřmi pružnými lanky, které jsou na jedné straně vetknuty do základu a druhý konec mají vetknutý do obruče. Určete vlastní frekvenci torzního kmitání obruče s malými výchylkami, je-li zanedbána hmotnost lanek a tloušťka obruče.

Dáno: m, r, E -modul pružnosti lanek, J -moment setrvačnosti prutu lanek k ose procházející středem prutu lanek a kolmé na náčrtu



Obr. 1.2

e-ení:

Vzhledem k faktu, že obru rotuje kolem hlavní centrální osy setrva nosti, vymizí setrva né síly \mathbf{D}_n a \mathbf{D}_t ($e = 0$). Ze setrva ného momentu (1.19) z stane nenulová jen složka odpovídající ose rotace $-I_\xi \alpha$. Pro stru nost zápisu vynecháme index ξ . Prvním úkolem je ur it tuhost k jedné loukot . Zatížíme-li nosník, jehož konc m je zabrán no v nato ení podle obr. 1.2, dostaneme vztah pro pr hyb a p íslu-nou tuhost ve tvaru

$$w = \frac{Fr^3}{12EJ} \Rightarrow k = \frac{12EJ}{r^3}. \quad (1.20)$$

Pro malé výchylky je možné pr hyb loukot na konci vyjád it pomocí úhlu nato ení celé obru e ve tvaru $w = r\varphi$. Moment vratných sil m fleme vyjád it ve tvaru

$$M_V = 4kwr = 4kr^2\varphi. \quad (1.21)$$

Dosadíme-li do posledního vztahu za tuhost (1.20), máme

$$M_V = \frac{48EJ}{r}\varphi. \quad (1.22)$$

Moment setrva nosti obru e je vzhledem k zanedbání její tlou- ky možné vyjád it ve tvaru

$$I = mr^2. \quad (1.23)$$

Z momentové podmínky dynamické rovnováhy a ze vztahu $\alpha = \ddot{\varphi}$ dostáváme pohybovou rovnici torzního kmitání obru e

$$mr^2\ddot{\varphi} + \frac{48EJ}{r}\varphi = 0. \quad (1.24)$$

Vyd lme celou rovnici mr^2 a dostaneme

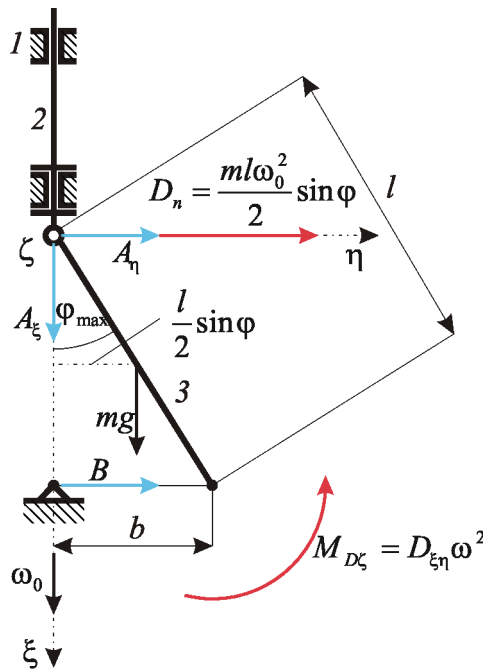
$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{48EJ}{mr^3}}_{\Omega^2}\varphi = 0, \quad (1.25)$$

z čehož plyne vztah pro vlastní frekvenci torzního kmitání obru e ve tvaru

$$\Omega = \sqrt{\frac{48EJ}{mr^3}}. \quad (1.26)$$

Příklad 1.2

Na obr. 1.3 je znázorněn tuhý prut 3 rotující konstantní úhlovou rychlostí ω_0 kolem osy ξ . Jeden jeho konec je spojen sférickou vazbou s členem 2 a druhý konec je spojen nehmotným vláknem délky b se základním rámem. Naším úkolem je určit úhel vykývnutí φ a v případě dosažení maximální hodnoty φ_{\max} určit sílu ve vlákně.



Obr. 1.3

e-ní:

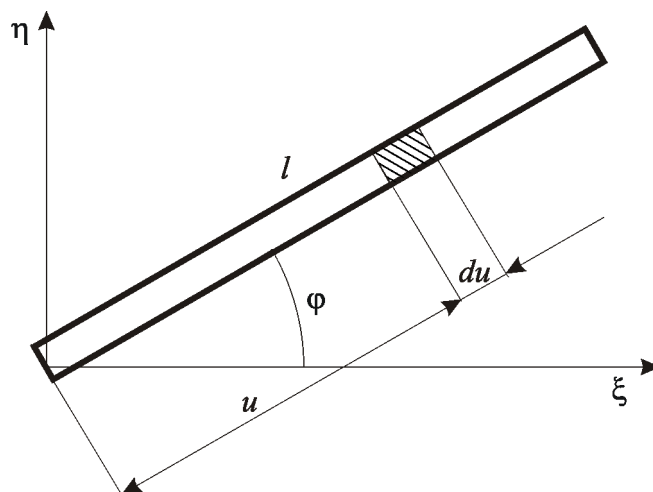
Ze setrvačných sil (1.12) je nenulová jen odstředivá síla

$$D_n = \frac{ml\omega_0^2}{2} \sin \varphi \quad (1.27)$$

a ze složek setrvačného momentu (1.19) je nenulová jen složka

$$M_{D\xi} = D_{\xi\eta} \omega_0^2. \quad (1.28)$$

Oba tyto setrvačné úinky jsou v obr. 1.3 vyznačeny červenou barvou. Pro výpočet setrvačného momentu (1.28) je třeba určit deviační moment $D_{\xi\eta}$. Z obr. 1.4 snadno dojdeme ke vztahu (předpokládáme, že tyč je homogenní a prismatická)



Obr. 1.4

$$D_{\xi\eta} = \int_0^l \frac{m}{l} u^2 \sin \varphi \cos \varphi du = \frac{ml^2}{3} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (1.29)$$

Nejdříve budeme předpokládat, že úhel vykývnutí leží v intervalu

$$\varphi \in (0, \varphi_{\max}), \quad \varphi_{\max} = \arcsin \frac{b}{l}. \quad (1.30)$$

Podmínky dynamické rovnováhy mají tvar

$$\begin{aligned} A_\xi + mg &= 0, \\ \vec{B}_0 + A_\eta + \frac{ml\omega_0^2}{2} \sin \varphi &= 0, \\ \underbrace{\frac{ml^2}{3} \sin \varphi \cos \varphi \omega_0^2 - mg \frac{l}{2} \sin \varphi + \vec{B}_0 \sqrt{l^2 - b^2}}_{D_{\xi\eta}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Z první rovnice (1.31) plyne, že svislá reakce zůstává konstantní a má hodnotu $A_\xi = -mg$. Z druhé rovnice je možné vypočítat reakci A_η avšak až na základě znalosti úhlu φ . Proto je třeba nejdříve řešit třetí rovnici, která po úpravě dostane tvar

$$\sin \varphi \left(\frac{l\omega_0^2}{3} \cos \varphi - \frac{g}{2} \right) = 0. \quad (1.32)$$

Takže mohou (ale nemusí) existovat tato řešení:

$$a) \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi, \quad (1.33)$$

kde řešení $\sin \varphi = \pi$ odpovídá nestabilní rovnováze a navíc neleží v požadovaném intervalu daném délkou vlákna, takže jej nebudeme brát v úvahu. Další řešení má tvar

$$b) \frac{l\omega_0^2}{3} \cos \varphi - \frac{g}{2} = 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{3g}{2l\omega_0^2}, \quad (1.34)$$

av-ak toto e-ení nemusí existovat, vyjde-li hodnota $\frac{3g}{2l\omega_0^2}$ mimo interval $\langle -1, 1 \rangle$ (zlomek je v-ak nezáporný, takže nás zajímá jen otázka, zda není v t-í nejl jedna). Pakliže tato hodnota padne do jmenovaného intervalu, m-žeme psát

$$\varphi = \pm \arccos\left(\frac{3g}{2l\omega_0^2}\right). \quad (1.35)$$

Ze vztahu (1.34) plyne zajímavý záv r. Je-li úhlová rychlost otá ení malá, av-ak nenulová, úhel vykývnutí z- stává nulový aíl do kritické hodnoty úhlové rychlosti ($\frac{3g}{2l\omega_0^2} = 1 = \cos \varphi$.)

$$\omega_{0,krit} = \pm \sqrt{\frac{3g}{2l}}. \quad (1.36)$$

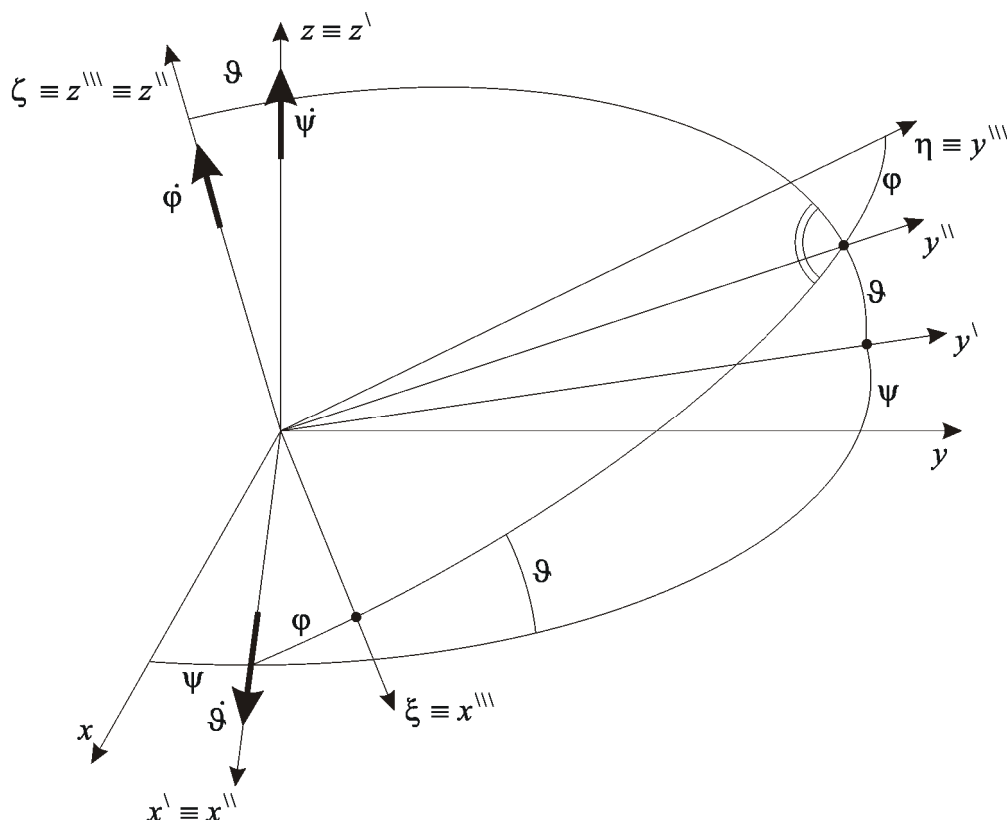
V p ípad , že úhel φ by vy-el v t-í nejl $\varphi_{\max} = \arcsin \frac{b}{l}$, je t eba v rovnicích (1.31) respektovat nenulovou neznámou hodnotu reakce B a za doposud neznámou hodnotu φ dosadit φ_{\max} . e-ením soustavy (1.31) pak jsou vazební reakce A_ξ , A_η a B .

2. Dynamika sférického pohybu tělesa

Sférický pohyb je definován tak, že jeden bod zmiňovaného tělesa je trvale v klidu. Podívejme se nejprve na problém z hlediska kinematického. Těleso v prostoru má 6 ° volnosti-3 nezávislé posuvy a 3 nezávislá natočení. Jestliže jeden bod znehybníme, odpadnou 3 posuvy (odebereme 3 ° volnosti) a tělesu zbývají 3 nezávislé rotace. Tyto rotace mohou být popsány různými způsoby. Jedním z nejpoužívanějších způsobů jsou Eulerovy úhly [1].

Využití Eulerových úhlů

Na obr. 2.1 jsou znázorněny tyto úhly, pomocí nichž popíšeme sférický pohyb tělesa obecného tvaru.



Obr. 2.1

Předpokládejme, že těleso je pevně spojeno se souřadnicovým systémem $\xi\eta\zeta$, který byl nejprve totožný se pevným souřadnicovým systémem xyz a do své aktuální polohy se dostal postupně:

- rotací kolem osy z o úhel ψ (úhel precese)
- rotací kolem osy $x' \equiv x''$ o úhel ϑ (úhel nutace)
- rotací kolem osy $\xi \equiv z''' \equiv z''$ o úhel φ (úhel vlastní rotace)

časové derivace těchto úhlů (přísuvné úhlové rychlosti) odpovídají jednotlivým rotacím z nichž je sférický pohyb složen. Budeme-li chtít vyjádřit moment hybnosti a kinetickou energii tělesa obecného tvaru konajícího sférický pohyb, je vhodné vyjádřit tyto veličiny v systému $\xi\eta\zeta$, protože matice setrvačnosti tělesa je v tomto systému diagonální.

(Kinetická energie je prostorový invariant-skalár, takže nezávisí na prostoru, ve kterém ji vyjádříme). Vektor výsledné úhlové rychlosti vyjádřený v souadnicovém systému $\xi\eta\zeta$ resp. xyz má tvar

$${}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad \text{resp.} \quad {}_{xyz} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Matice setrvačnosti tělesa $\mathbf{J}_{\xi\eta\zeta}$ již byla vyjádřena v první kapitole ve tvaru (1.1). Moment hybnosti vyjádříme ve tvaru analogickém (1.2)

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} {}_{\xi\eta\zeta} \quad (2.2)$$

a hybnost ve tvaru analogickém (1.3)

$$\mathbf{H} = m \mathbf{v}_S = m {}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{r}_S. \quad (2.3)$$

Na tomto místě je třeba připomenout, že obě poslední vektorové veličiny jsou vyjádřeny pomocí sloček v souadnicovém systému $\xi\eta\zeta$. Podobně jako v první kapitole můžeme vyjádřit kinetickou energii ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{2} {}^T {}_{\xi\eta\zeta} \mathbf{L} = \frac{1}{2} {}^T {}_{\xi\eta\zeta} \mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} {}_{\xi\eta\zeta}. \quad (2.3)$$

Setrvačné úhly určíme opět podle vztahu (1.9) a (1.13)

$$\mathbf{D} = -\dot{\mathbf{H}}, \quad \mathbf{M}_D = -\dot{\mathbf{L}}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{M}_D = -\dot{\mathbf{L}} = -\dot{\mathbf{L}}|_{\xi\eta\zeta} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}. \quad (2.5)$$

Tyto vztahy nebudeme pro jejich komplikovanost dopřítávat a omezíme se zde na rotační symetrická tělesa, čímž se celá metodika trochu zjednoduší.

Využití modifikovaných Eulerových úhlů [2]

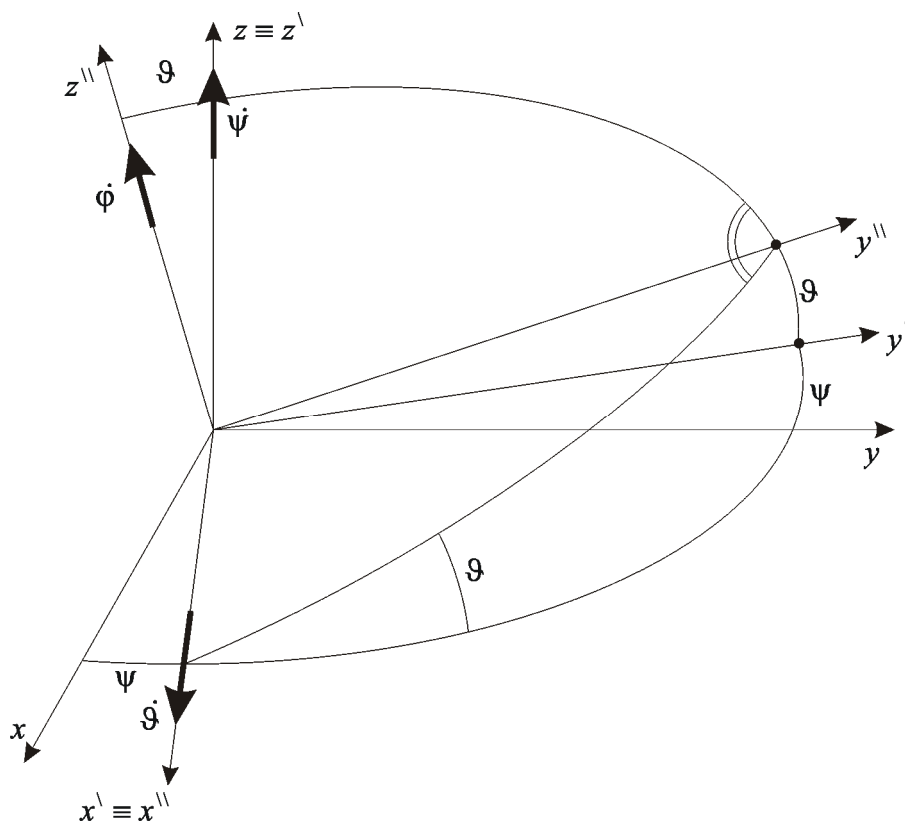
Vzhledem k tomu, že těleso koná vlastní rotaci kolem osy symetrie ζ , jsou si rovny momenty setrvačnosti

$$I_\xi = I_\eta = I. \quad (2.6)$$

Všechny deviaté momenty jsou rovněž nulové, takže matice setrvačnosti je diagonální a má tvar

$$\mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{J}^{\parallel} = \begin{bmatrix} I, & 0, & 0 \\ 0, & I, & 0 \\ 0, & 0, & I_o \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

kde jsme symbolem I_o označili osový moment setrvačnosti tělesa k ose symetrie. V takovém případě není nutné zavádět matici setrvačnosti odpovídající souadnicovému systému $\xi\eta\zeta$, ale postačí tuto matici vyjádřit v "dvouávkovaném" systému $x^{\parallel}, y^{\parallel}, z^{\parallel}$, protože pootočením o úhel φ se matice setrvačnosti nezmění. Pak píšeme úhly nazýváme tzv. modifikovanými Eulerovými úhly, které jsou znázorněny na obr. 2.2.



Obr. 2.2

Vektor výsledné úhlové rychlosti můžeme být pak vyjádřit v "dvou árkovaném" souadnicovém systému ve tvaru

$${}_{\xi\eta\zeta}^{\dot{\omega}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Budeme-li chtít vyjádřit setrvačný moment podle vztahu (2.5), je třeba si uvědomit, že pohyb "dvou árkovaného" souadnicového systému v základnímu rámu není popsán vektorem úhlové rychlosti ${}_{\xi\eta\zeta}^{\dot{\omega}}$, ale

$${}^{\parallel} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Tento systém se neotáčí rychlostí $\dot{\phi}$ v nehybnému základnímu rámu. Vyjádříme tedy moment hybnosti v dvou árkovaném systému

$$\mathbf{L}^{\parallel} = \mathbf{J} {}_{\xi\eta\zeta}^{\dot{\omega}} {}_{\xi\eta\zeta}^{\dot{\omega}} = \mathbf{J}^{\parallel} {}^{\parallel}. \quad (2.10)$$

Pro výpočet setrvačného momentu je třeba derivaci momentu hybnosti provést podle vztahu

$$\mathbf{M}_D = -\dot{\mathbf{L}} = -\dot{\mathbf{L}}^{\parallel} - {}^{\parallel} \times \mathbf{L}^{\parallel}. \quad (2.11)$$

Hybnost vyjádříme ve tvaru

$$\mathbf{H} = m \mathbf{v}_S = m {}^{\parallel} \times \mathbf{r}_S, \quad (2.12)$$

zatímco kinetickou energii ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{2} {}^T_{\xi\eta\zeta} \mathbf{L}^{\backslash\backslash} = \frac{1}{2} {}^T_{\xi\eta\zeta} \mathbf{J}^{\backslash\backslash} {}_{\xi\eta\zeta} = \frac{1}{2} {}^T_{\xi\eta\zeta} \mathbf{J}^{\backslash\backslash} {}_{\xi\eta\zeta}. \quad (2.13)$$

Všechny vektorové a tenzorové veličiny (matice setrvačnosti je vlastně tenzor) jsou vyjádřeny pomocí složek v "dvou-úhlovém" souadnicovém systému.

Poznámka:

Tenzor je matematické vyjádření jisté veličiny, jež podléhá transformaci souadnic v závislosti na souadnicovém systému. Tenzor nultého řádu je skalár, který je invariantní vůči změně souadnicového systému. Tenzorem prvního řádu je vektor, který podléhá tenzorové (vektorové) transformaci (transformace se provede násobením daného vektoru transformační maticí). Tenzor druhého řádu můžeme vyjádřit jako soustavu souadnic ve tvaru matice. Transformaci lze provést násobením transformační maticí zleva a maticí k ní transponovanou zprava. Pro tenzory vyššího řádu již transformaci nelze popsat pomocí maticového postupu, ale je třeba využít indexovou symboliku [3].

Po provedení naznačených operací dostaneme

$$\mathbf{L}^{\backslash\backslash} = \mathbf{J}^{\backslash\backslash} {}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} I\dot{\vartheta} \\ I\dot{\psi} \sin \vartheta \\ I_o(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

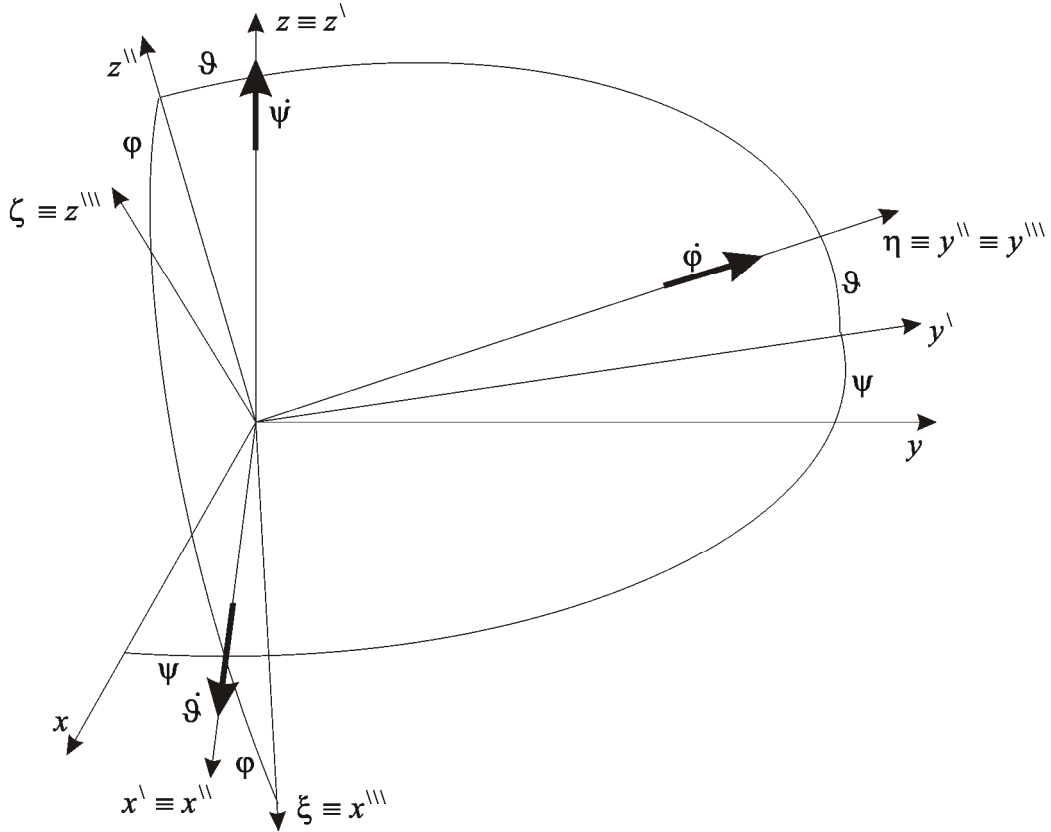
$$E_k = \frac{1}{2} [I\dot{\vartheta}^2 + I\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + I_o(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2], \quad (2.15)$$

$$\mathbf{M}_D = -\dot{\mathbf{L}}^{\backslash\backslash} - \mathbf{L}^{\backslash\backslash} \times \mathbf{L}^{\backslash\backslash} = \begin{bmatrix} -I\ddot{\vartheta} - \underbrace{I_o\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \vartheta}_{M_{G1}} - (I_o - I)\dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ -I\ddot{\psi} \sin \vartheta - 2I\dot{\psi}\dot{\vartheta} \cos \vartheta + \underbrace{I_o\dot{\varphi}\dot{\vartheta}}_{M_{G2}} + I_o\dot{\psi}\dot{\vartheta} \cos \vartheta \\ -I_o(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \cos \vartheta - \dot{\psi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Využití Cardanových úhlů

Jako alternativu k popisu sférického pohybu pomocí Eulerových (nemodifikovaných) úhlů si budeme prezentovat popis pomocí Cardanových úhlů. Představme si, že souadnicový systém x, y, z na obr. 2.3 se dostane do obecné polohy pomocí tří nezávislých rotací.

- rotace kolem osy z o úhel ψ
- rotace kolem osy x^{\backslash} o úhel ϑ
- rotace kolem osy $y^{\backslash\backslash}$ o úhel φ



Obr. 2.3

Modifikované Cardanovy úhly pro rotační symetrická tělesa zde speciálně zavádět nebudeme. Jen je možné konstatovat, že by se shodovaly s modifikovanými Eulerovými úhly, avšak osa vlastní rotace by byla totožná s osou symetrie tělesa $\eta \equiv y''$. Podle obr. 2.3 nyní můžeme napsat vektor výsledné úhlové rychlosti vyjádřený v souřadnicovém systému ξ, η, ζ pevně spojeném s pohybujícím se tělesem ve tvaru

$${}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \cos \varphi - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \varphi + \dot{\vartheta} \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Matice setrvačnosti má tvar 1.1. Speciálně pro rotační symetrické těleso s osou symetrie $\eta \equiv y''$ má tato matice tvar

$$\mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{J}'' = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I_o & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

kde význam uvedených symbolů byl vysvětlen v souvislosti se vztahy (2.6) a (2.7). Moment hybnosti má v případě symetrického tělesa tvar

$$\mathbf{L}'' = \mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} {}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{J}'' {}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} I(\dot{\vartheta} \cos \varphi - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \varphi) \\ I_o(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \vartheta) \\ I(\dot{\psi} \cos \vartheta \cos \varphi + \dot{\vartheta} \sin \varphi) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Setrva ný moment m fleme vyjád it podle vztahu (2.16), tj.

$$\mathbf{M}_D = -\dot{\mathbf{L}}^{\parallel} - \mathbf{L}^{\parallel} \times \mathbf{L}^{\parallel}. \quad (2.20)$$

Po dosazení dostaneme

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} I_o(\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\vartheta\cos\varphi + \dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi + \dot{\phi}\dot{\vartheta}\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\sin\varphi) - \\ - I(\ddot{\vartheta}\cos\varphi - \ddot{\psi}\cos\vartheta\sin\varphi + 2\dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi) \\ - I_o(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\sin\vartheta + \dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) \\ - I_o(\dot{\phi}\dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\phi}\dot{\psi}\cos\vartheta\sin\varphi - \dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi) - \\ - I(\ddot{\psi}\cos\vartheta\cos\varphi - 2\dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\varphi + \dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi + \ddot{\vartheta}\sin\varphi) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

V tomto p ípad , kdy se jedná o rota n symetrické t lesu s osou symetrie $\eta \equiv y^{\parallel}$, m fleme dosadit do (2.21) $\varphi = 0$ a v-echny setrva né ú inky pak jsou vyjád eny v "dvou árkovaném" sou adnicovém systému viz obr. 2.3. To odpovídá zavedení modifikovaných Cardanových úhl .

P íklady na sférický pohyb

P íklad 2.1

Valení kufelového pastorku 3 po nehybném kufelovém kole (viz obr. 2.4) je kinematicky vynuceno rotací uná-e e 2 kolem vertikální osy o_{21} konstantní úhlovou rychlostí ω_{21} . Stanovte kinetickou energii a setrva né ú inky p sobící na komolý kufel o hmotnosti m . Vrcholový úhel pastorku je β . Dáno: $m, r_s, \beta, I_o, I, \omega_{21} = konst.$

Vyuflijte vztahu

$$\mathbf{M}_D = -\dot{\mathbf{L}}^{\parallel} - \mathbf{L}^{\parallel} \times \mathbf{L}^{\parallel} = \begin{bmatrix} -I\ddot{\vartheta} - I_o\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\vartheta - (I_o - I)\dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta \\ -I\ddot{\psi}\sin\vartheta - 2I\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + I_o(\dot{\phi}\dot{\vartheta} + \dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) \\ -I_o(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta) \end{bmatrix}.$$

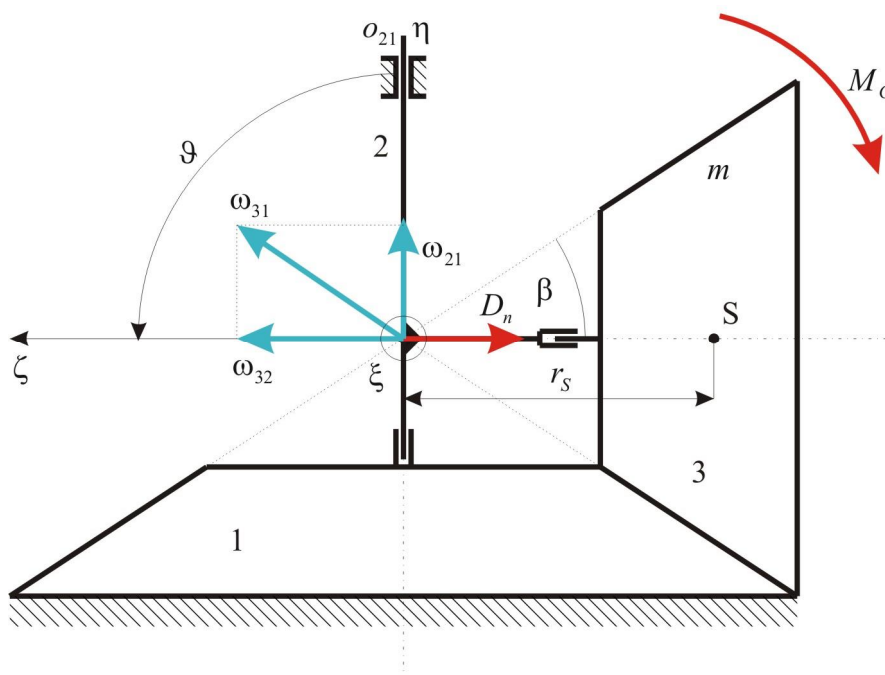
e-ení:

Povrchová p ímka, na které dochází k dotyku ídících kufel , je vlastn okamflitou osou výsledné rotace, protofle ve v-ech jejích bodech má kufel 3 nulovou rychlost. S ohledem na skute nost, fle je zadána úhlová rychlost $\dot{\psi} = \omega_{21}$, m fleme dopo ítat i druhotnou úhlovou rychlost

$$\dot{\phi} = \omega_{32} = \omega_{21} \tan\beta. \quad (2.22)$$

Protofle $\vartheta = 90^\circ = konst.$, $\dot{\phi} = \omega_{32} = konst.$ a $\dot{\psi} = konst.$, dostane setrva ný moment tvar

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} -I_o \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$



Obr. 2.4

Tento výraz se nazývá gyroskopickým momentem, který také můžeme vyjádřit pomocí vektorového vztahu (setrvačný moment v tomto konkrétním případě neobsahuje jiné členy)

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{M}_G = I_o \dot{\phi} \times \dot{\psi}. \quad (2.24)$$

Odstředivou sílu můžeme vyjádřit ve skalárním resp. ve vektorovém tvaru (souadnice jsou vztaženy k štvouřkovanému souadnicovému systému)

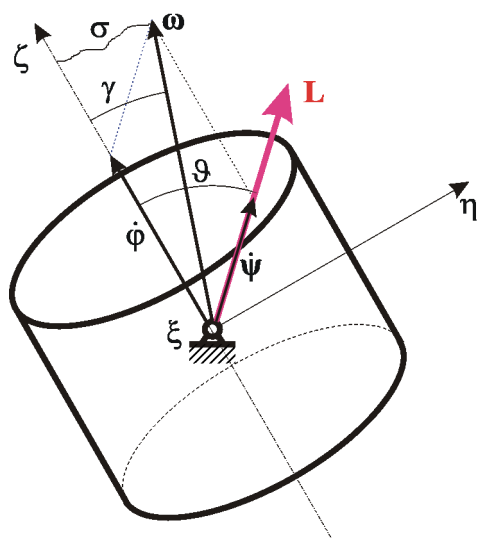
$$D_n = m r_S \omega_{21}^2, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m r_S \omega_{21}^2 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Příklad 2.2 [4]

Uvažme pohyb bezsilového setrvačníku viz obr. 2.5, tj. setrvačníku, na který nepůsobí žádné vnější sílové úinky. Tzn., že vlastní tíha je v rovnováze s reakcí v podpoře, která je umístěna ve středu hmotnosti setrvačníku. Setrvačníku byla v době $t=0$ udělena úhlová rychlost $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0$.

Podle vztahu změny momentu hybnosti v diferenciální formě ($\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$) plyne, že $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L} = \text{konst.}$ To znamená, že vektor momentu hybnosti má konstantní směr i velikost. Ani jedno však zatím neznáme. Zavedme nejdříve souadnicový systém ξ, η, ζ tak, aby osa ζ byla totožná s osou symetrie setrvačníku, osa η aby ležela v rovině σ dané osou ζ a

nositelkou úhlové rychlosti ω a současně kolmá na osu ζ a aby osa ξ byla na obě osy kolmá a současně tyto tři osy tvořily pravotočivý souřadnicový systém.



Obr. 2.5

Východiskem řešení je rozklad vektoru úhlové rychlosti ω do dvou složek, tj. do osy ζ a osy precese dané nositelkou L . Opět je třeba připomenout, že tento rozklad je jenom myšlený, protože osu precese (nositelku L) zatím neznáme. Proto je nejdříve třeba dokázat, že vektor L leží také v rovině σ . V souřadnicovém systému ξ, η, ζ vyjádříme matici setrvačnosti resp. vektor úhlové rychlosti ve tvaru

$$\mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{J}^{\parallel} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_o \end{bmatrix}, \quad \omega_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Vektor momentu hybnosti vyjádříme podle známého vztahu

$$\mathbf{L}^{\parallel} = \mathbf{J}^{\parallel} \omega_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} 0 \\ I\omega_\eta \\ I_o\omega_\zeta \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

ze kterého je zřejmé, že vektor momentu hybnosti má skutečně složku ve směru osy ξ nulovou, takže leží v rovině $\eta\zeta$. Nyní si připomeňme vztah (2.14), který má tvar

$$\mathbf{L}^{\parallel} = \mathbf{J}^{\parallel} \omega_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} I\dot{\vartheta} \\ I\dot{\psi} \sin \vartheta \\ I_o(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \end{bmatrix}.$$

Srovnáním obou posledních vztahů plyne, že

$$L_\xi = I\dot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \vartheta = \vartheta_0 = \text{konst.} \quad (2.28)$$

Z obr. 2.5 a ze vztahu (2.14) je také zřejmé, že

$$L_\eta = I\dot{\psi} \sin \vartheta_0 = L \sin \vartheta_0 \Rightarrow L = I\dot{\psi}. \quad (2.29)$$

Ze srovnání (2.14) a (2.17) a s ohledem na (2.28) také plyne

$$\omega_\eta = \dot{\psi} \sin \vartheta_0, \quad \omega_\zeta = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta_0. \quad (2.30)$$

Protože $\mathbf{L} = \overrightarrow{\text{konst.}} \Rightarrow L = \text{konst.}$, kde L je velikost vektoru momentu hybnosti \mathbf{L} a můžeme psát

$$\dot{\psi} = \frac{L}{I} = \dot{\psi}_0. \quad (2.31)$$

Srovnáním ζ -ových složek vektoru \mathbf{L} vyjádřeného pomocí vztah (2.27) a (2.14) dostaneme

$$L_\zeta = L \cos \vartheta_0 = I_o(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta_0) \quad (2.32)$$

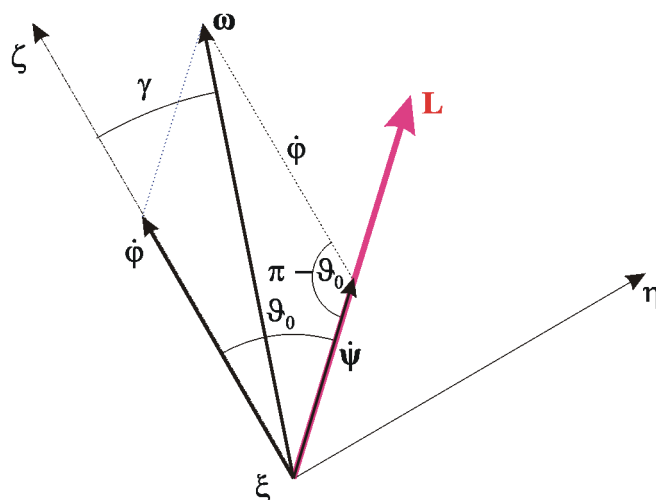
z čehož plyne s ohledem na (2.31)

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 = \frac{L \cos \vartheta_0 - I_o \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0}{I_o} = \frac{I \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0 - I_o \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0}{I_o} = \left(\frac{I}{I_o} - 1 \right) \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0. \quad (2.33)$$

Z posledního vztahu je zřejmé, že obsažená závorka bude rozhodovat o vzájemném smyslu mezi vlastní rotací $\dot{\phi}_0$ a precesí $\dot{\psi}_0$. Bude-li hodnota závorky záporná ($I_o > I$), pak je znaménko vlastní rotace rozdílné od znaménka precese a hovoříme o protiběžné precesi (za předpokladu, že ϑ_0 je ostrý úhel). V opačném případě se jedná o souběžnou precesi. Shrňme-li získané poznatky dostaneme $\vartheta = \vartheta_0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$, $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$. Protože γ je známý úhel (poloha ζ a vektoru úhlové rychlosti je známa), můžeme ze vztah (2.30) a γ vyjádřit úhel ϑ_0 . Pomocí složek ω_ζ a ω_η je dán známý úhel γ a tento pomocí funkce hledaného úhlu ϑ_0 . Takže můžeme po dosazení (2.33) za $\dot{\phi}_0$ psát

$$\tan \gamma = \frac{\omega_\eta}{\omega_\zeta} = \frac{\dot{\psi}_0 \sin \vartheta_0}{\dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0} = \frac{I_o}{I} \tan \vartheta_0 \Rightarrow \tan \vartheta_0 = \frac{I}{I_o} \tan \gamma. \quad (2.34)$$

Jak je zřejmé, úhel γ zůstává také konstantní. Z posledního vztahu vypočítáme úhel ϑ_0 . Ze sinové věty a z obr. 2.6 vypočítáme $\dot{\psi}_0$ podle vztahu



Obr. 2.6

$$\frac{\sin(\pi - \mathcal{G}_0)}{\omega_0} = \frac{\sin \gamma}{\dot{\psi}_0} \Rightarrow \dot{\psi}_0 = \omega_0 \frac{\sin \gamma}{\sin \mathcal{G}_0}. \quad (2.35)$$

Poslední vztah je třeba napsat s ohledem na vztah

$$\sin \mathcal{G}_0 = \frac{\operatorname{tg} \mathcal{G}_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \mathcal{G}_0}} \quad (2.36)$$

do tvaru

$$\dot{\psi}_0 = \omega_0 \frac{\sin \gamma}{\sin \mathcal{G}_0} = \omega_0 \sqrt{\frac{I_o^2}{I^2} \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}. \quad (2.37)$$

Po dosazení (2.34) do vztahu (2.33) pro $\dot{\phi}$, dostaneme

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 = \omega_0 \frac{\sin \gamma}{\sin \mathcal{G}_0} \left(\frac{I}{I_o} - 1 \right) \cos \mathcal{G}_0 = \omega_0 \frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \mathcal{G}_0} \left(\frac{I}{I_o} - 1 \right) = \omega_0 \frac{\sin \gamma}{\frac{I}{I_o} \operatorname{tg} \gamma} \left(\frac{I}{I_o} - 1 \right) = \omega_0 \cos \gamma \left(1 - \frac{I_o}{I} \right). \quad (2.38)$$

Budeme-li respektovat počáteční podmínky $\phi(0) = 0$, $\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}_0$, $\psi(0) = 0$, pak snadno dostaneme závislost jednotlivých úhlů na ose

$$\psi(t) = \omega_0 t \sqrt{\frac{I_o^2}{I^2} \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}, \quad \phi(t) = \omega_0 t \cos \gamma \left(1 - \frac{I_o}{I} \right). \quad (2.39)$$

Z posledních vztahů je zřejmé, že bezsilový setrvačník je schopen se pohybovat rovnoměrnou rotací a precesí při konstantním úhlu nutace.

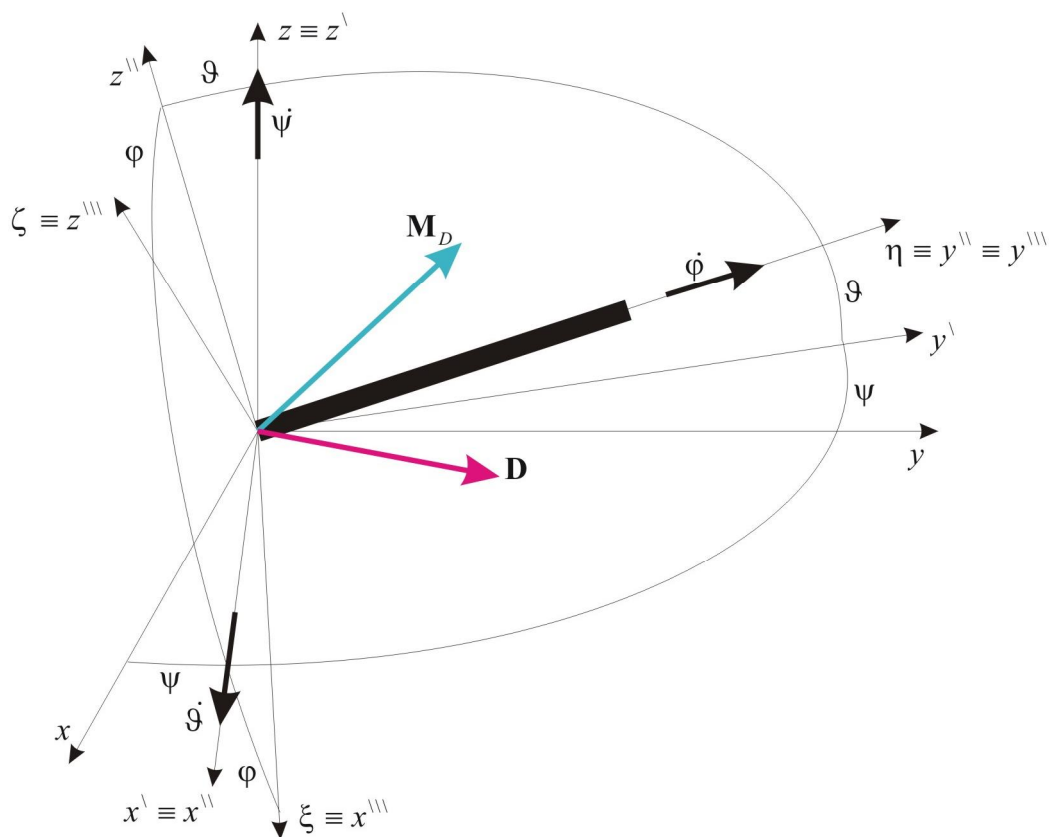
Příklad 2.3

Uvažujeme setrvačnický váleček na hlavě kanónu o hmotnosti m a délky l , která soustavně vykonává unášenou precesi odpovídající úhlu azimutu (odměru) ψ a nutaci (náměru) popsanou úhlem elevace \mathcal{G} . Hlavě pokládáme za tlustou prismatickou tyč. Proveďte výpočet pomocí Cardanových úhlů.

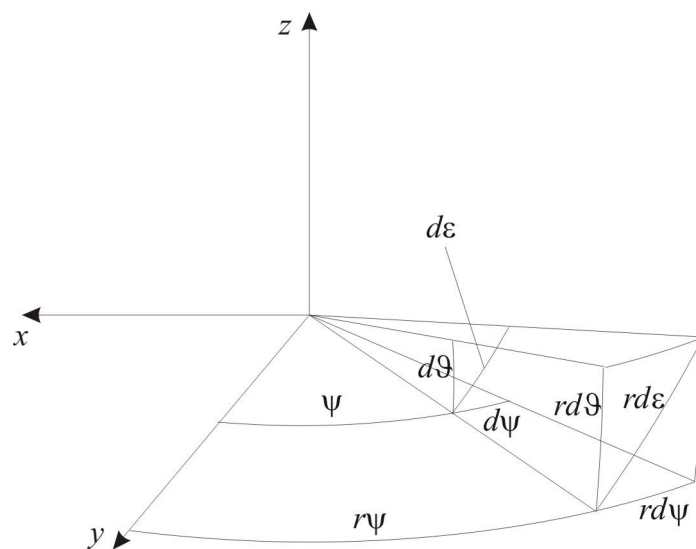
Na obr. 2.7 je znázorněn model hlavní kanónu a jeho popis pomocí Cardanových úhlů. Úhlová rychlost vlastní rotace, která leží na ose η je nulová ($\dot{\phi} = 0$) a odpovídající úhel rotace položíme také rovný nule tzn., že $\phi = 0$. Položíme-li ve vztahu (2.21) $\phi = 0$, $\dot{\phi} = 0$, dostaneme pro setrvačnický moment vztah

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} (I_o - I)\dot{\psi}^2 \sin \mathcal{G} \cos \mathcal{G} - I\ddot{\mathcal{G}} \\ -I_o(\ddot{\psi} \sin \mathcal{G} + \dot{\psi} \dot{\mathcal{G}} \cos \mathcal{G}) \\ (2I - I_o)\dot{\psi} \dot{\mathcal{G}} \sin \mathcal{G} - I\ddot{\psi} \cos \mathcal{G} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Pro určení výsledné setrvačnické síly je třeba určit zrychlení středu hmotnosti. Je-li tyč prismatická a homogenní, leží její střed hmotnosti v polovině délky. Protože jde o souběžné rotace kolem vzájemných os, můžeme vektorově sčítat úhlové rychlosti. To dokážeme podle obr. 2.8.



Obr. 2.7



Obr. 2.8

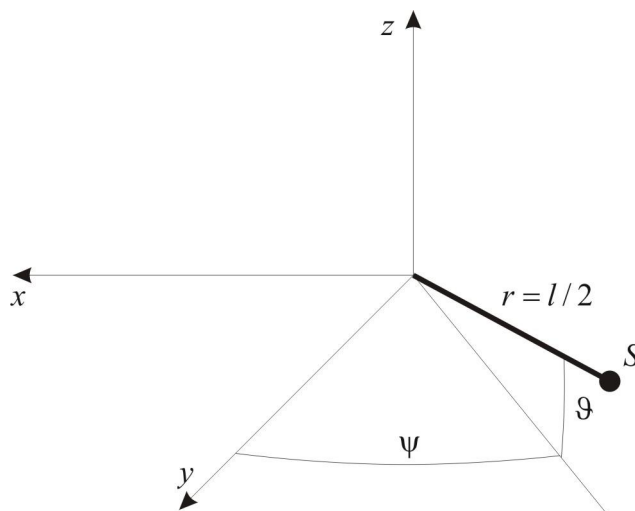
Podle Pythagorovy v ty platí

$$rd\varepsilon = \sqrt{r^2 d\psi^2 + r^2 d\vartheta^2}. \quad (2.41)$$

Celou rovnici kdyžl vyd líme rdt , dostaneme

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2} . \quad (2.42)$$

Z posledního vztahu plyne, že výslednou úhlovou rychlost získáme vektorovým součtem jejich úhlových rychlostí. Akcelerační poměry budou trochu komplikovanější. Abychom zachovali obecnost příkladu, budeme předpokládat nenulová úhlová zrychlení $\ddot{\psi}$ a $\ddot{\vartheta}$. Pro stručnost označme $r = l/2$.



Obr. 2.9

Označíme-li radiusvektor středem hmotnosti \mathbf{r}_S , můžeme podle obr. 2.9 psát

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} -r \cos \vartheta \sin \psi \\ r \cos \vartheta \cos \psi \\ r \sin \vartheta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_S = \dot{\mathbf{r}}_S = \begin{bmatrix} r \dot{\vartheta} \sin \vartheta \sin \psi - r \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \psi \\ -r \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \psi - r \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \psi \\ r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{a}_S = \begin{bmatrix} r \ddot{\vartheta} \sin \vartheta \sin \psi + r \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \sin \psi + 2r \dot{\vartheta} \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \psi - r \ddot{\psi} \cos \vartheta \cos \psi + r \dot{\psi}^2 \cos \vartheta \sin \psi \\ -r \ddot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \psi - r \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \cos \psi + 2r \dot{\vartheta} \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \psi - r \ddot{\psi} \cos \vartheta \sin \psi - r \dot{\psi}^2 \cos \vartheta \cos \psi \\ r \ddot{\vartheta} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \end{bmatrix}.$$

(2.44)

K tomuto výsledku můžeme přijít také rozkladem výsledného sférického pohybu na unáivou precesi 21 reprezentovanou úhlem ψ a druhotnou nutaci 32 reprezentovanou úhlem ϑ . Pak píšeme

$$31 = 32 + 21,$$

$$\mathbf{v}_{31} = \mathbf{v}_{32} + \mathbf{v}_{21}, \quad v_{32} = r \dot{\vartheta}, \quad v_{21} = r \dot{\psi} \cos \vartheta,$$

$$\mathbf{a}_{31} = \mathbf{a}_{32} + \mathbf{a}_{21} + \mathbf{a}_c, \quad (2.45)$$

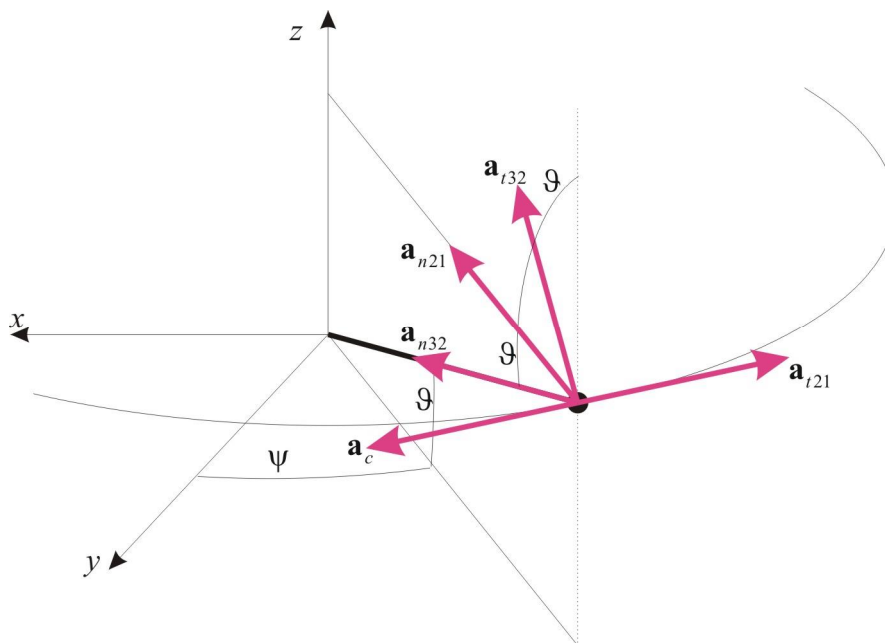
kde

$$\mathbf{a}_{32} = \mathbf{a}_{n32} + \mathbf{a}_{t32}, \quad \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_{n21} + \mathbf{a}_{t21}, \quad \mathbf{a}_c = 2 \boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{v}_{32}, \quad \boldsymbol{\omega}_{21} = \dot{\psi} \mathbf{k}. \quad (2.46)$$

Jednotlivé veličiny mají velikost

$$a_{n21} = r\dot{\psi}^2 \cos \vartheta, \quad a_{t21} = r\ddot{\psi} \cos \vartheta, \quad a_{n32} = r\dot{\vartheta}^2, \quad a_{r32} = r\ddot{\vartheta}, \quad a_c = 2r\dot{\psi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta, \quad (2.47)$$

a směr, který je zřejmý z obr. 2.10



Obr. 2.10

Vektorově tyto veličiny můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{a}_{n21} = \begin{bmatrix} r\dot{\psi}^2 \cos \vartheta \sin \psi \\ -r\dot{\psi}^2 \cos \vartheta \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{t21} = \begin{bmatrix} -r\ddot{\psi} \cos \vartheta \cos \psi \\ -r\ddot{\psi} \cos \vartheta \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{n32} = \begin{bmatrix} r\dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \sin \psi \\ -r\dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta \cos \psi \\ -r\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

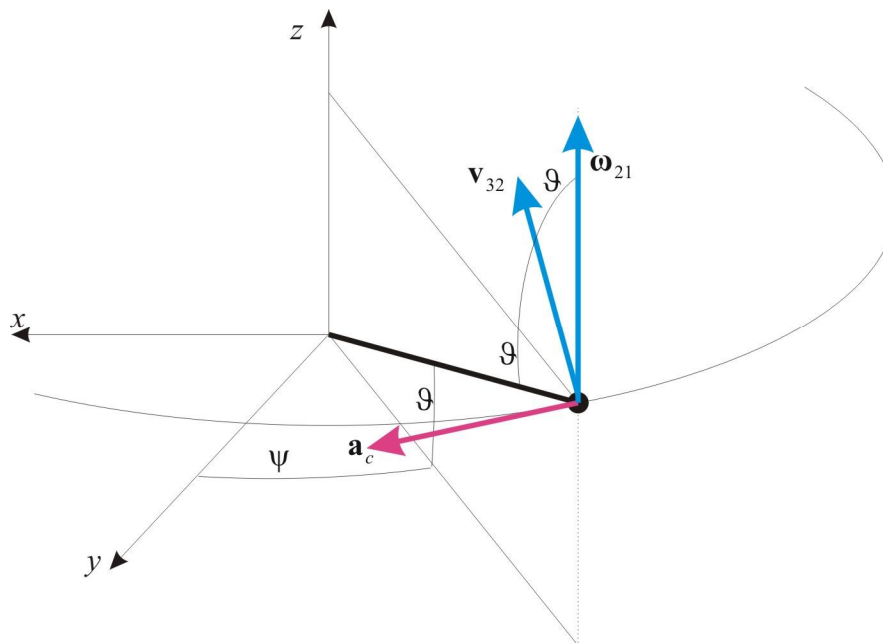
$$\mathbf{a}_{t32} = \begin{bmatrix} r\ddot{\vartheta} \sin \vartheta \sin \psi \\ -r\ddot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \psi \\ r\ddot{\vartheta} \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_c = \begin{bmatrix} 2r\dot{\vartheta}\dot{\psi} \sin \vartheta \cos \psi \\ 2r\dot{\vartheta}\dot{\psi} \sin \vartheta \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Vektorovým součtem těchto zrychlení dostaneme zrychlení středů hmotnosti hlavních kanónů ve tvaru (2.44). Výsledná setrvačná síla, která působí ve středů sférického pohybu bude rovna

$$\mathbf{D} = -m\mathbf{a}_S = -m(\mathbf{a}_{n21} + \mathbf{a}_{t21} + \mathbf{a}_{n32} + \mathbf{a}_{t32} + \mathbf{a}_c). \quad (2.50)$$

Poznámka:

Směr Coriolisova zrychlení je dán vektorovým součinem $\mathbf{a}_c = 2 \boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{v}_{32}$, kde $\boldsymbol{\omega}_{21} = \dot{\psi} \mathbf{k}$ a $\mathbf{v}_{32} = r\dot{\vartheta}$, jak už bylo uvedeno.



Obr. 2.11

Je-li \mathbf{a}_c je třeba připomenout, že prsty pravé ruky při vektorovém násobení ukazují směr násobení, tj. od ω_{21} do \mathbf{v}_{32} a palec ukazuje směr výsledku tzn. vektorového součinu.

Příklad 2.4

Jako další příklad si uvažujeme rotující tyčku, jejíž ustálenou rotaci jsme měli v příkladu 1.2. Nyní budeme její pohyb jako neustálený, takže se bude jednat o sférický pohyb. Na obr. 2.12 je znázorněna tyčka 3, která je přes rotační vazbu spojena s nehmotným lemem 2, na který působí konstantní moment M_0 . Z obr. 2.12 je zřejmé, že $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, tzn., odpadá vlastní rotace tyčky okolo své osy. Naším úkolem je sestavit pohybové rovnice, pomocí nichž by se numericky pohyb mohl.

Dáno: $I_0, I, M_0, \psi(0) = 0, \dot{\psi}(0) = 0, \vartheta(0) = \vartheta_0$ (malý), $\dot{\vartheta}(0) = 0$.

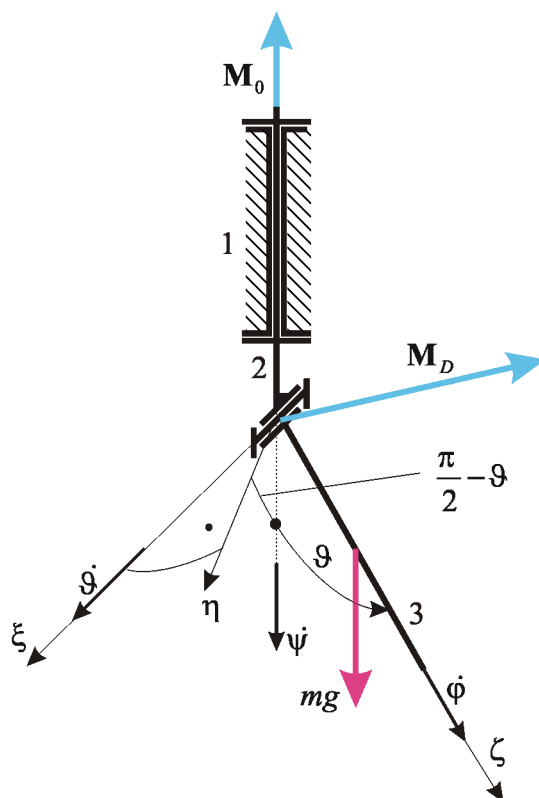
Souadnicový systém zvolíme tak, že osu symetrie tyčky ztotožníme s osou ζ , osu ξ umístíme tak, aby nutace, pomocí níž přejde osa precese do osy vlastní rotace, ležela na ose ξ . Tuto osu η doplníme tak, aby souadnicový systém ξ, η, ζ byl pravotočivý. Pohybové rovnice budou 2 momentové podmínky k osám ξ a η , což můžeme vektory zapsat ve tvaru (Složkové podmínky rovnováhy by sloužily k výpočtu reakcí v závěsu, takže je vynecháme)

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}_D = \mathbf{0}. \quad (2.51)$$

Po rozepsání dostaneme

$$mg \frac{l}{2} \sin \vartheta + I \ddot{\vartheta} + (I_o - I) \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0, \quad (2.52)$$

$$M_0 \sin \vartheta + I \ddot{\psi} \sin \vartheta + (2I - I_o) \dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta = 0.$$



Obr. 2.12

Rovnice (2.52) můžeme přepsat do maticového tvaru

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (2.53)$$

kde

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \sin \vartheta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \vartheta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -mg \frac{l}{2} \sin \vartheta - (I_o - I) \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ -M_o \sin \vartheta - (2I - I_o) \dot{\psi} \dot{\vartheta} \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Tuto soustavu nelineárních diferenciálních rovnic neumíme řešit analyticky, proto jediný způsob vhodný pro řešení této soustavy je numerická integrace. Pokud budeme chtít využít standardní proceduru v MATLABu -ode23 nebo ode45, je třeba provést jistou úpravu. Uvedené procedury jsou vhodné pro řešení maticových diferenciálních rovnic s podmínkou ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.55)$$

Pro dosažení tvaru (2.55) přijdeme k rovnici (2.53) triviální identitou

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

a obě rovnice můžeme zapsat v kompaktním maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

který p epí-eme do tvaru

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{x}), \quad (2.58)$$

význam symbol $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x}), \mathbf{c}(\mathbf{x})$ je z ejmý z p edchozích dvou vztah . V-echny tyto veli iny jsou funkcí stavového vektoru

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

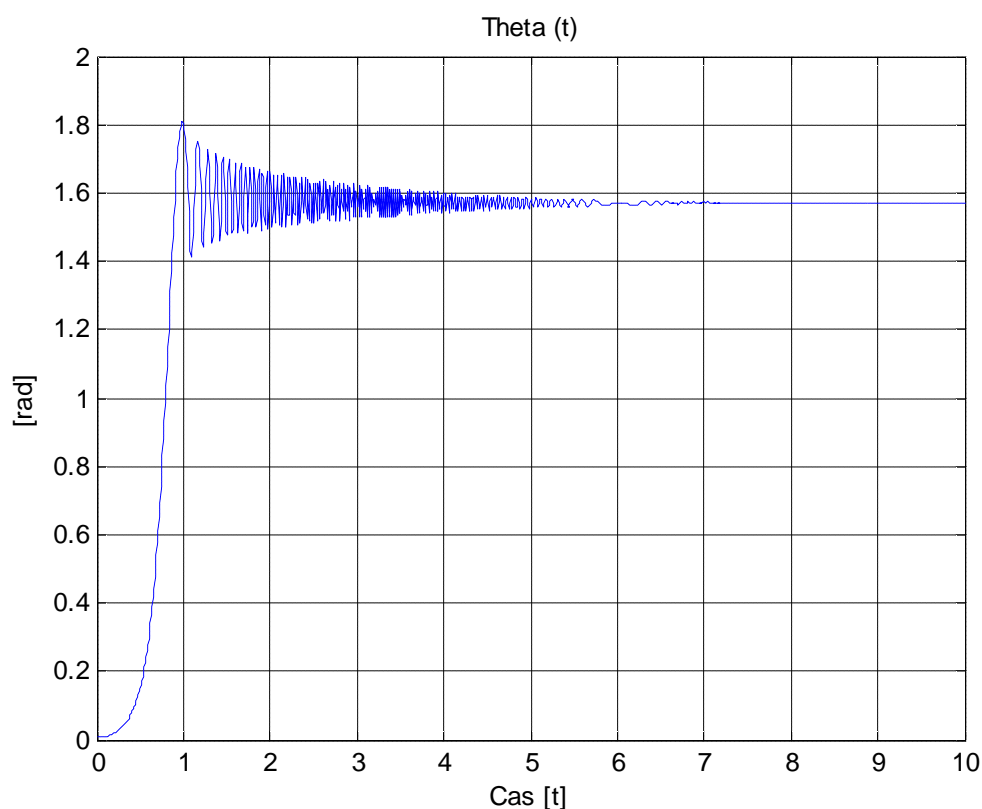
rovnici (2.58) p evedeme do tvaru (2.55) jednodu-e tak, fle ji vynásobíme $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})$ zleva a dostaneme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}(\mathbf{x})]}_{\mathbf{f}(\mathbf{x},t)}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.60)$$

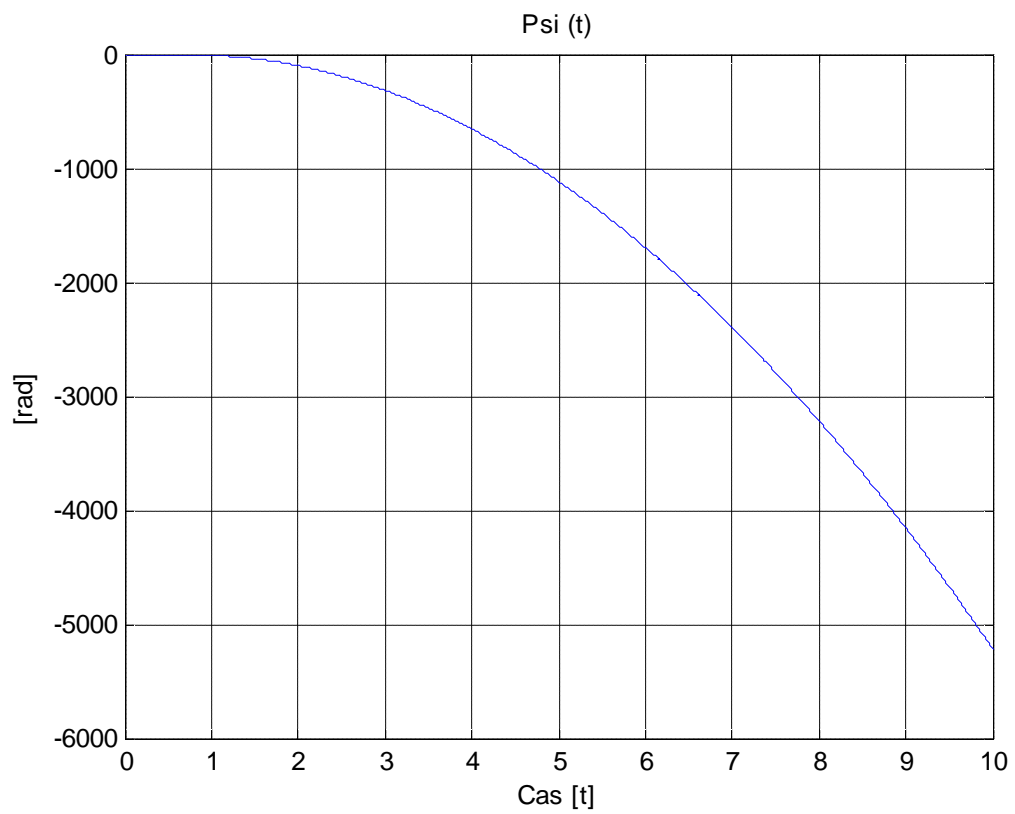
Pokud dosadíme konkrétní hodnoty

$$m = 1 \text{ kg}, \quad l = 0.5 \text{ m}, \quad I = \frac{ml^2}{3}, \quad I_o = I / 20, \quad \vartheta_0 = 0.01, \quad M_o = 10 \text{ Nm}$$

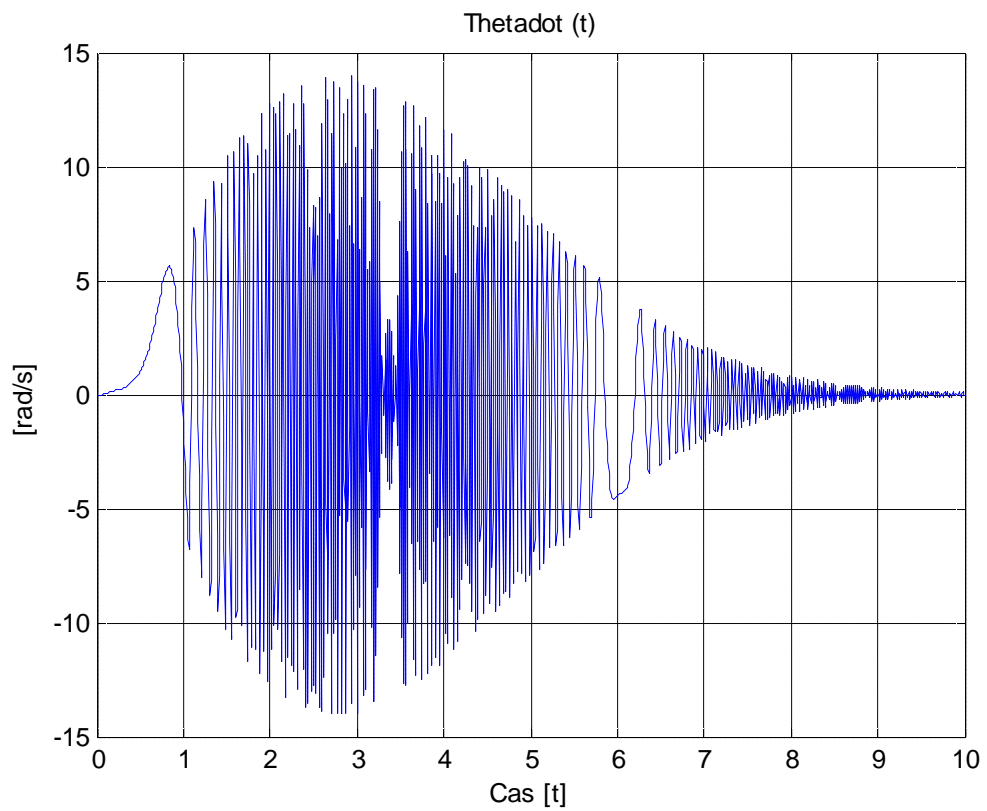
dostaneme výsledky, které jsou znázorn ny na obr. 2.13-2.16. Nejd íve jsou znázorn ny zobecn ěné výchylky $\vartheta(t)$ a $\psi(t)$ a následují zobecn ěné rychlosti $\dot{\vartheta}(t)$ a $\dot{\psi}(t)$.



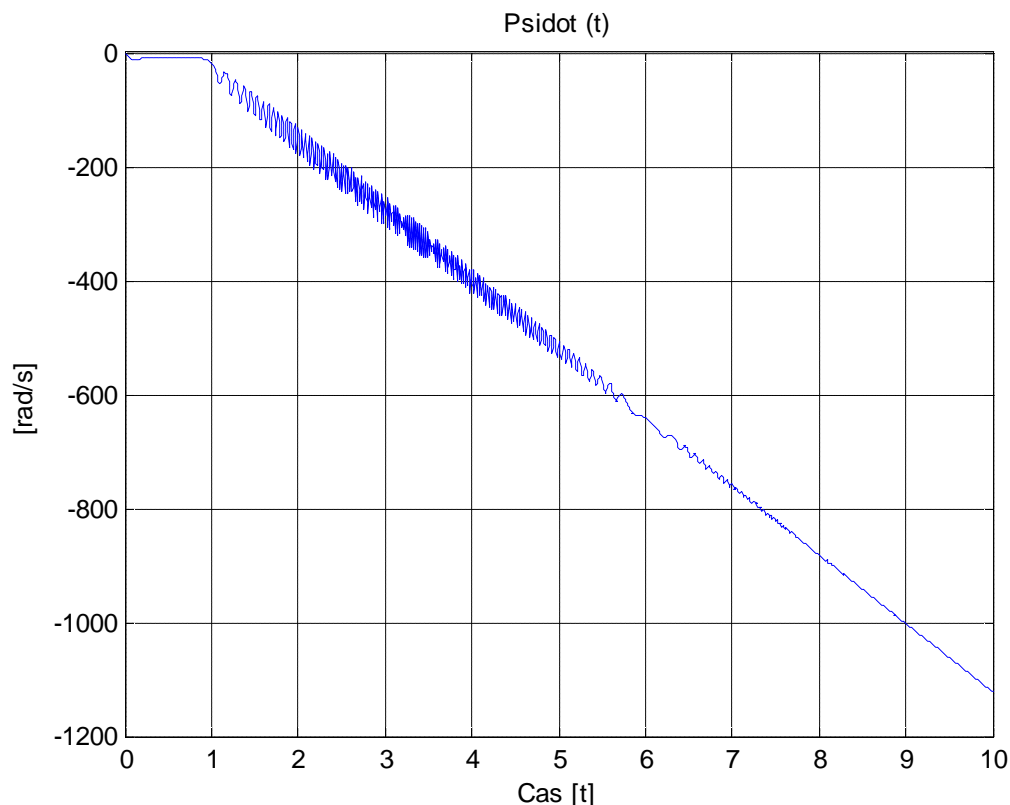
Obr. 2.13



Obr. 2.14



Obr. 2.15



Obr. 2.16

Protože je tu ka nebrzd ná a odpor prost edí je zanedbán, je z ejmé, že limitní hodnota vykývnutí (úhel ϑ) musí být $\pi/2 = 1.5708$, což obr. 2.13 jasn ukazuje. Také rychlost nutace $\dot{\vartheta}$ se s ustálením úhlu na konstantní hodnot blíží k nule, což ukazuje obr. 2.15

P íklad 2.5

P i brou-ení potrubních svar koná brusný kotou sférický pohyb viz obr. 2.17. Úhlová rychlost vlastní rotace ω_0 je dána otá kami ru ní brusky $n = 7000 \text{ ot/min}$, zatímco úhlová rychlost precese je dána konstantní rychlostí st edu brusného kotou e po obvodu potrubí $v_0 = 0.2 \text{ m/s}$. Úhel nutace je trvale 90° , takže úhlová rychlost a zrychlení nutace jsou nulové. Ur ete setrva né ú inky p sobící na brusný kotou a ú inky na ruku d lníka, který s bruskou pracuje. Pr m r potrubí je $D = 2R = 0.75 \text{ m}$.

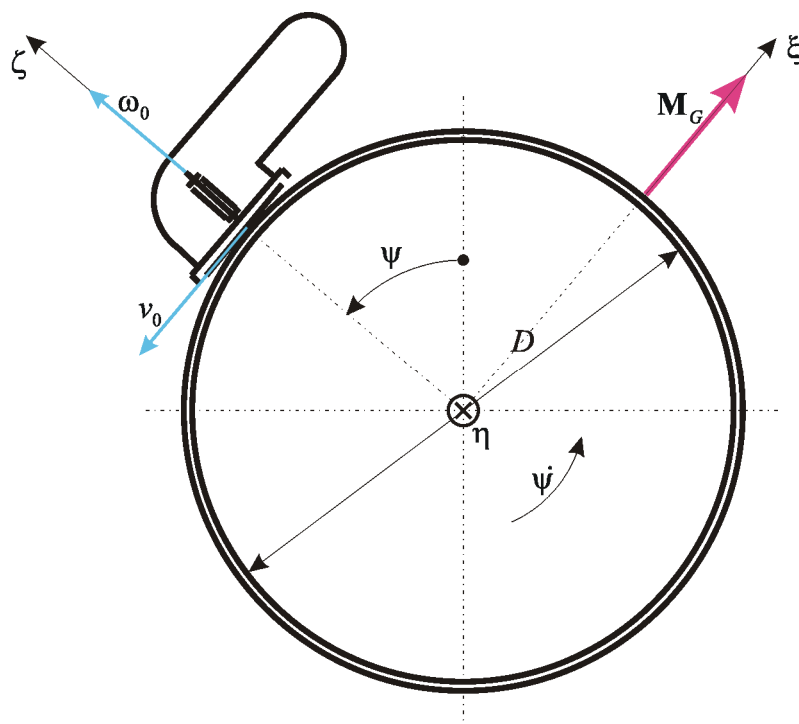
e-ení

Zavedeme osy podle obr. 2.17. Rychlost precese ur íme podle vztahu

$$\dot{\psi} = \frac{v_0}{R} = \frac{2v_0}{D} = 0.5333 \text{ rad/s.} \quad (2.61)$$

Dále ur íme rychlost vlastní rotace kotou e

$$\dot{\phi} = \omega_0 = \frac{\pi n}{30} = 733.0383 \text{ rad/s.} \quad (2.62)$$



Obr. 2.17

Setrva né síly zanedbáme, protože v_0 je malá a konstantní, takže odst edivá síla bude také malá a te ná setrva ná síla bude nulová. Z komponent setrva ného momentu je nenulový jen gyroskopický moment, který vyjád íme ve tvaru

$$M_G = I_o \omega_0 \dot{\psi} = 0.0977 \text{ Nm.} \quad (2.63)$$

P íklad 2.6

e-te pohyb t ílkého setrva níku pomocí

- Eulerových modifikovaných úhl
- Cardanových úhl

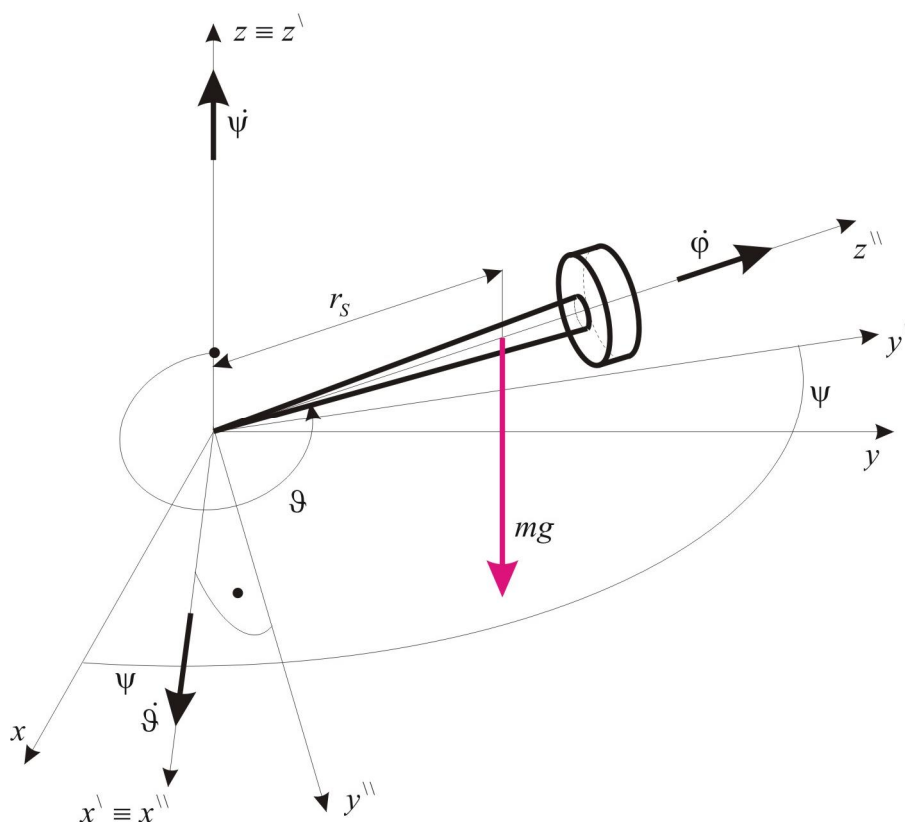
P edpokládejme, že úhlová rychlost vlastní rotace setrva níku $\dot{\phi}$ je konstantní a mnohokrát vyšší, než úhlové rychlosti precese a nutace $\dot{\phi} = \omega_0 \gg \dot{\psi}, \dot{\theta}$. Dále budeme p edpokládat, že zm na úhlu nutace je malá, takže úhel nutace m ňeme vyjád it jako sou et konstantní složky a malé perturbace

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta, \quad \Delta\theta \ll 1, \quad \sin \theta \doteq \sin \theta_0. \quad (2.64)$$

- Na obr. 2.18 je znázorn n ílký setrva ník, jeho í poloha je popsána pomocí modifikovaných Eulerových úhl .

Odpovídající poáte ní podmínky jsou:

$$t = 0, \psi(0) = 0, \dot{\psi}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0, \vartheta(0) = \vartheta_0 = \frac{3\pi}{2}, \dot{\vartheta}(0) = \Delta\dot{\vartheta}(0) = 0, \Delta\vartheta(0) = 0. \quad (2.65)$$



Obr. 2.18

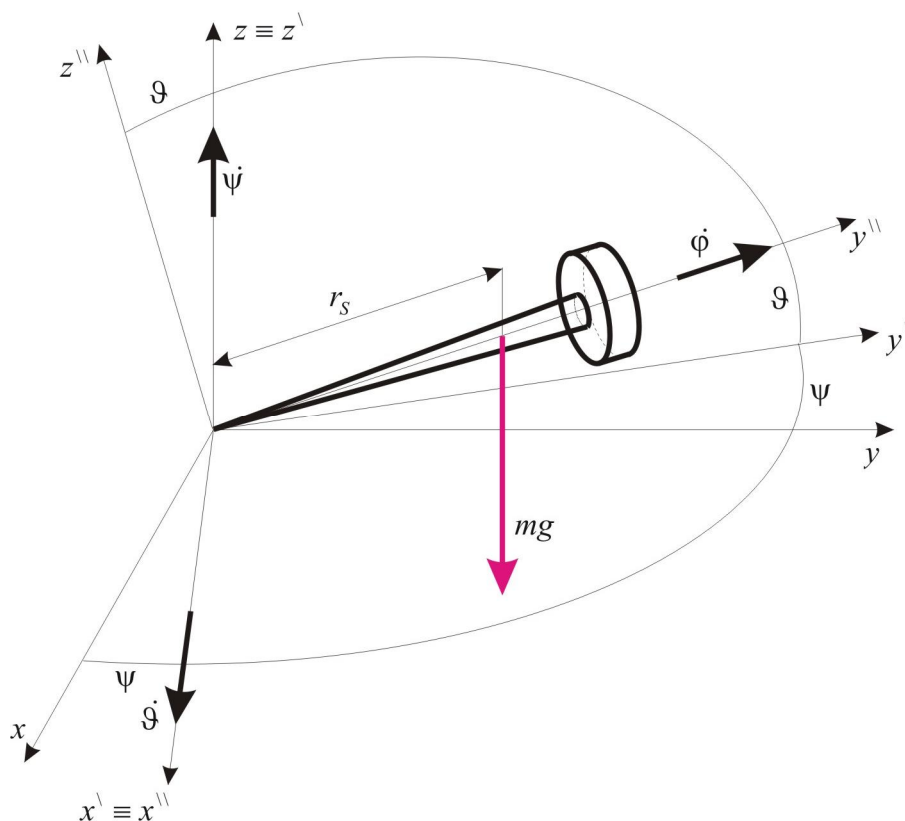
Momentové podmínky k osám x'' a y'' , které pro zkrácení zápisu označíme ξ a η zapíšeme ve tvaru:

$$\begin{aligned} M_{D\xi} - mgr_s &= 0, \\ M_{D\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Momentovou podmínku rovnováhy k ose ζ nepíšeme, protože zde je zadána kinematická podmínka $\dot{\varphi} = \omega_0 = \text{konst.}$ Tyto podmínky píšeme ve svtle vztahu (2.16) a za předpokladu $\sin \vartheta = \sin \vartheta_0 = -1$, $\dot{\varphi} = \omega_0$ dostanou tvar

$$\begin{aligned} I \Delta \ddot{\vartheta} - I_o \omega_0 \dot{\psi} &= -mgr_s, \\ I \ddot{\psi} + I_o \omega_0 \Delta \dot{\vartheta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

b) Na obr. 2.19 je znázorněn stejný setrvaník, jehož poloha je tentokrát popsána pomocí Cardanových úhlů.



Obr. 2.19

Odpovídající podmínky jsou:

$$t = 0, \psi(0) = 0, \dot{\psi}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0, \vartheta(0) = \vartheta_0 = 0, \dot{\vartheta}(0) = \Delta \dot{\vartheta}(0) = 0, \Delta \vartheta(0) = 0. \quad (2.68)$$

Označíme-li pro stručnost zápisu $\xi \equiv x''$, $\eta \equiv y''$, $\zeta \equiv z''$, budeme psát momentové podmínky k osám ξ a ζ , které mají tvar

$$\begin{aligned} M_{D\xi} - mgr_s &= 0, \\ M_{D\zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Po dosazení za složky setrvačného momentu z (2.21) kam z důvodu osové symetrie můžeme položit $\varphi = 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} I \Delta \ddot{\vartheta} - I_o \omega_0 \dot{\psi} &= -mgr_s, \\ I \ddot{\psi} + I_o \omega_0 \Delta \dot{\vartheta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Srovnáme-li poslední dvě rovnice s (2.67) vidíme, že jsme dospěli ke stejnému výsledku. Ke řešení použijeme metodu Laplaceovy transformace. Označíme nejdříve Laplaceovy obrazy

$$T = \mathcal{L} \{ \Delta \vartheta \}, \quad P = \mathcal{L} \{ \psi \} \quad (2.71)$$

a aplikujeme na soustavu (2.70) Laplaceovu transformaci. Potom píšeme

$$Ip^2T + I_o\omega_0pP = -mgr_s \frac{1}{p}, \quad (2.72)$$

$$Ip^2P - I_o\omega_0pT = 0.$$

Na pravé stran první rovnice výraz $1/p$ je obrazem jednotkového skoku, který vyjaduje, že tíhový moment začal působit v ose $t=0$. Řešením soustavy dvou algebraických rovnic v obrazech dostaneme

$$T = \frac{-mgr_s}{Ip(p^2 + \Omega^2)}, \quad (2.73)$$

$$P = \frac{-I_o\omega_0mgr_s}{I^2} \frac{1}{p^2(p^2 + \Omega^2)}.$$

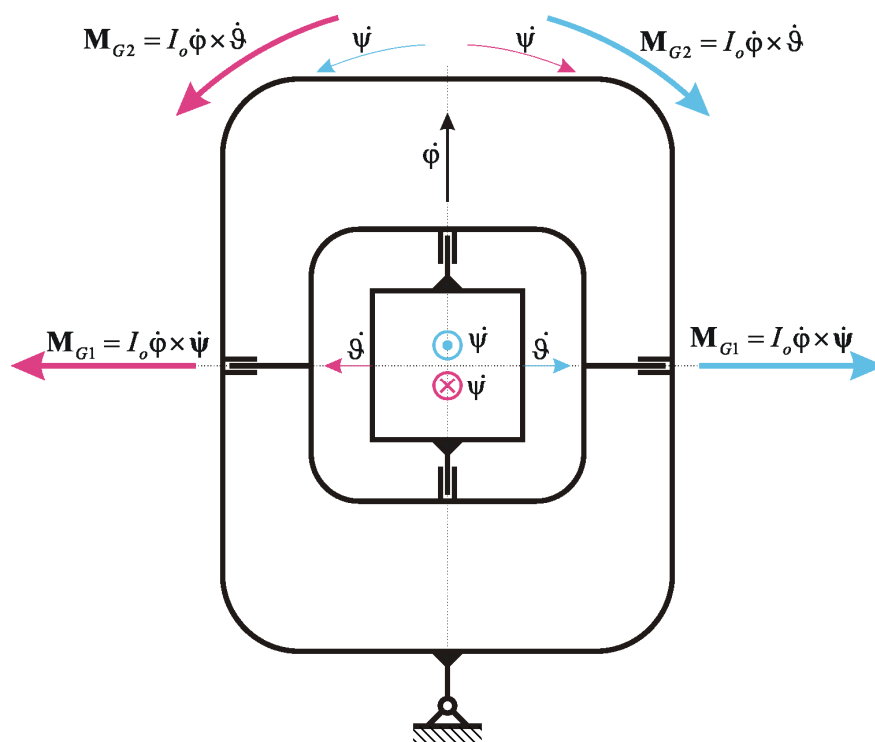
Ve vztazích (2.73) jsme označili

$$\Omega^2 = \frac{I_o^2}{I^2} \omega_0^2. \quad (2.74)$$

Řešení rovnic (2.70) získáme zpřetnou Laplaceovou transformací vztah (2.73) ve tvaru

$$\begin{cases} \Delta\vartheta = -\frac{mgr_s}{I\Omega^2}(1 - \cos\Omega t), \\ \psi = -\frac{mgr_s}{I_o\omega_0}\left(t - \frac{1}{\Omega}\sin\Omega t\right). \end{cases} \quad (2.75)$$

Příklad 2.7



Obr. 2.20

Na obr. 2.20 je znázorněnelní pohled na gyroskopický stabilizátor, který se používá v lodní dopravě a byl použit spíše jako kuriozita i v železniční dopravě. (Na světové výstavě v Ósace jezdil vlak po jednokolejné trati). Naším úkolem bude vysvětlit tento stabilizační jev.

Jevení

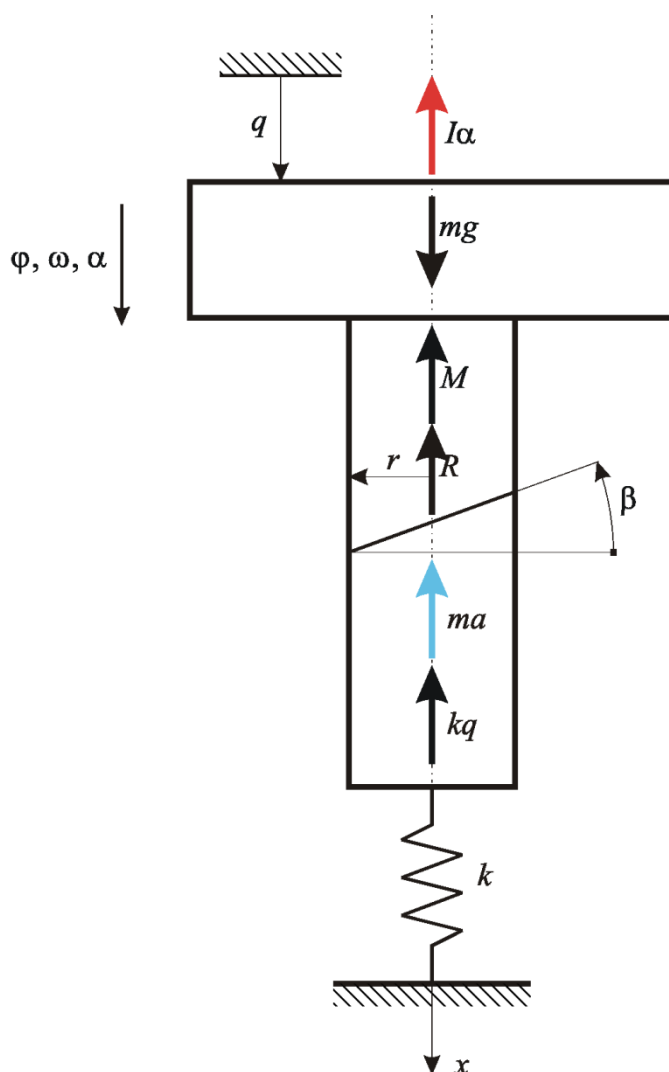
Gyroskopický setrvačník má vysoké otáčky (řádově až desítky tisíc za minutu) reprezentované úhlovou rychlostí vlastní rotace $\dot{\varphi} = \omega_0$, kterou považujeme za konstantní. Představme si nejprve situaci, která na obr. 2.20 je vyznačena červenou barvou. Vagón se naklápí na pravou stranu, v důsledku čehož vzniká unášivá precese $\dot{\psi}$ ve směru hodinových ručiček. Z vektorového součinu $\dot{\varphi} \times \dot{\psi}$ určíme gyroskopický moment \mathbf{M}_{G1} , který způsobí vyklácnutí \mathcal{S} vnitřního rámečku úhlovou rychlostí $\dot{\mathcal{S}}$ (včetně jeho vlastní rotace). Z vektorového součinu $\dot{\varphi} \times \dot{\mathcal{S}}$ určíme gyroskopický moment \mathbf{M}_{G2} (M_{G1} a M_{G2} jsou vyznačeny ve vztahu (2.16)), který působí proti směru úhlové rychlosti $\dot{\psi}$, takže brání pádu vagónu do strany. Situace při naklápění vagónu na druhou stranu je obdobná a všechny odpovídající veličiny jsou označeny modrou barvou.

3. Obecný prostorový a –roubový pohyb tělesa

Při vyšetřování obecného prostorového a –roubového pohybu tělesa (–roubový pohyb je speciálním případem obecného prostorového pohybu tělesa) využijeme základního rozkladu tohoto pohybu na unáivý posuvný a druhotný sférický pohyb. Výsledné setrvačné úinky pak uríme jako vektorový součet setrvačných úinek od těchto dílčích pohybů. (Protože z hlediska silového působení jsou soustavy tuhých těles lineární, můžeme použít principu superpozice). Oba tyto pohyby byly již diskutovány, můžeme rovnou přejít k příkladu.

Příklady na obecný prostorový a –roubový pohyb tělesa

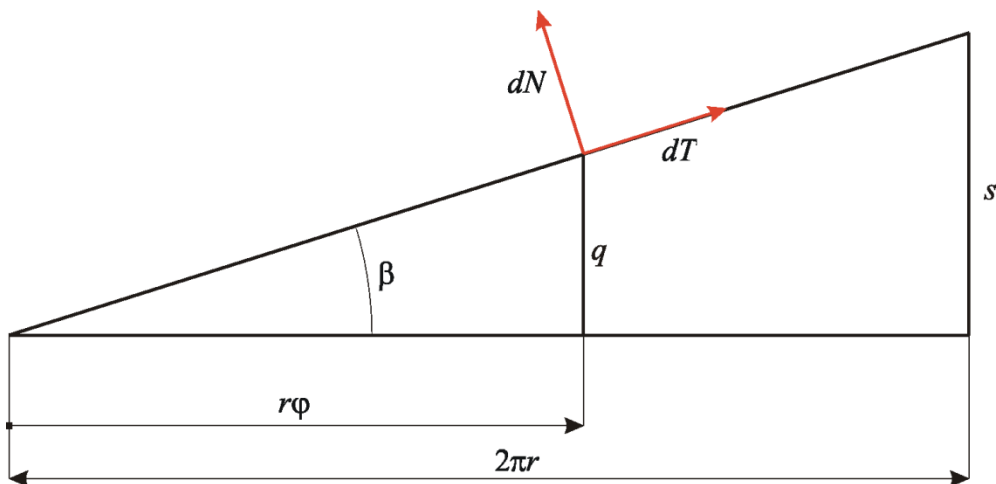
Příklad 3.1



Obr. 3.1

Na obr. 3.1 je znázorněno schéma vertikálního lisu konající –roubový pohyb v okamžiku začátku lisování výlisku ($t = 0, q(0) = 0$). Pro zjednodušení budeme předpokládat, že materiál výlisku je dokonale pružný s celkovou tuhostí k . Naším úkolem je –it pohyb po dosažení kontaktu lisu s lisovaným materiálem do okamžiku maximálního stlačení výlisku.

Předpokládejme, že v eteno není poháněn a pohybuje se jen vlastní setrvačností. Výchylku budeme značit od místa prvního kontaktu, tzn. $q(0)=0$ a poáte ní rychlost bude dána úhlovou rychlostí $\omega(0)=\dot{\varphi}(0)=\omega_0$. Vzhledem k tomu, že po et stup volnosti tohoto tělesa je 1, je jeho poloha jednoznačně popsána souadnicí q . Tento pohyb se skládá s unáivého pohybu ve směru osy x a z druhotné rotace kolem stejné osy. Druhotná rotace je s posuvným pohybem svázána přes stoupání řoubu. Na obr. 3.2 je znázorněn obvod řoubu rozvinutý do roviny.



Obr. 3.2

Z podobnosti trojúhelníků můžeme určit závislost mezi pootočením řoubu a osovým posunutím q podle vztahu

$$\varphi = 2\pi \frac{q}{s}, \quad (3.1)$$

kde s je stoupání závitu řoubu. Podobný vztah platí i pro časové derivace

$$\omega = \dot{\varphi} = 2\pi \frac{\dot{q}}{s}, \quad \alpha = \ddot{\varphi} = 2\pi \frac{\ddot{q}}{s}. \quad (3.2)$$

Z prvního vztahu (3.2) dostaneme druhou poáte ní (rychlostní) podmínku

$$\dot{q}_0 = s \frac{\dot{\varphi}_0}{2\pi} = s \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (3.3)$$

Bude-li zadán úhel stoupání β , je možné vyjádřit tento vztah ve tvaru

$$\dot{q}_0 = r\dot{\varphi}_0 \tan \beta.$$

Je-li těleso osově souměrné, bude na něj působit setrvačková síla od unáivého pohybu

$$D = ma = m\ddot{q}. \quad (3.4)$$

Výsledný moment od normálních a třecích sil v závitu můžeme napsat ve tvaru

$$M = \int dT r \cos \beta - \int dN r \sin \beta = Nfr \cos \beta - Nr \sin \beta = Nr(\cos \beta - f \sin \beta), \quad (3.5)$$

zatímco výslednou reakci od zmíněných sil v závitu přeme ve tvaru

$$R = \int dN \cos \beta + \int dT \sin \beta = \int dN \cos \beta + \int dN f \sin \beta = N(\cos \beta + f \sin \beta). \quad (3.6)$$

Vylou ením N z rovnice (3.6)

$$N = \frac{R}{\cos \beta + f \sin \beta} \quad (3.7)$$

a dosazením do (3.5) dostaneme závislost momentu p sobících sil v závitu na jejich výsledné reakci ve tvaru

$$M = \frac{Rr(f \cos \beta - \sin \beta)}{\cos \beta + f \sin \beta} = \frac{Rr(\operatorname{tg} \tilde{\varphi} \cos \beta - \sin \beta)}{\cos \beta + \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \sin \beta} = \frac{Rr(\operatorname{tg} \tilde{\varphi} - \operatorname{tg} \beta)}{1 + \operatorname{tg} \tilde{\varphi} \operatorname{tg} \beta}, \quad (3.8)$$

kde $\tilde{\varphi}$ je t ecí úhel spl ující podmínku $f = \operatorname{tg} \tilde{\varphi}$. S využitím vzore ku ze základní trigonometrie

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (3.9)$$

m ěme vztah (3.8) p epsat do tvaru

$$M = -Rr \operatorname{tg}(\beta - \tilde{\varphi}), \quad (3.10)$$

Pohybové rovnice popisující pohyb –roubového lisu jsou slofková podmínka ve sm ru osy lisu a momentová podmínka k této ose. Ob rovnice mají tvar

$$R + m\ddot{q} + kq - mg = 0, \quad (3.11)$$

$$M + I\ddot{\varphi} = 0. \quad (3.12)$$

Dosazením (3.10) do (3.12), vylou ením R z rovnice (3.11) a dosazením do (3.12) m ěme tuto rovnici p epsat do tvaru

$$-(mg - m\ddot{q} - kq) r \operatorname{tg}(\beta - \tilde{\varphi}) + I\ddot{\varphi} = 0. \quad (3.13)$$

Úhlové zrychlení $\ddot{\varphi}$ m ěme získat druhou derivací vztahu (3.1) a pak rovnici (3.13) p epi-me do tvaru (po vykrácení r)

$$\left[m \operatorname{tg}(\beta - \tilde{\varphi}) + I \frac{2\pi}{sr} \right] \ddot{q}(t) + k \operatorname{tg}(\beta - \tilde{\varphi}) q(t) = mg \operatorname{tg}(\beta - \tilde{\varphi}). \quad (3.14)$$

Pro zjednodu-ení zápisu ozna me

$$m_{red} = m \operatorname{tg}(\beta - \tilde{\varphi}) + I \frac{2\pi}{sr}, \quad k_{red} = k \operatorname{tg}(\beta - \tilde{\varphi}), \quad f_{red} = mg \operatorname{tg}(\beta - \tilde{\varphi}) \quad (3.15)$$

a rovnici (3.14) p epi-me do tvaru

$$m_{red} \ddot{q}(t) + k_{red} q(t) = f_{red}, \quad (3.16)$$

cofl je-t d lením m_{red} p ejde do tvaru

$$\ddot{q}(t) + \Omega^2 q(t) = \frac{f_{red}}{m_{red}}. \quad (3.16a)$$

Tato rovnice popisuje kmitání harmonického oscilátoru zatíženého konstantní silou f_{red} . Pokud budeme e-ít maximální stla ení výlisku, m fleme z rovnice (3.16) vyjád it zrychlení

$$a = \ddot{q} = \frac{1}{m_{red}}(f_{red} - k_{red}q) = a_0 - \Omega^2 q, \quad (3.17)$$

$$\text{kde } a_0 = \frac{f_{red}}{m_{red}} = \frac{mgtg(\beta - \tilde{\varphi})}{mtg(\beta - \tilde{\varphi}) + I \frac{2\pi}{sr}}, \quad \Omega^2 = \frac{k_{red}}{m_{red}} = \frac{ktg(\beta - \tilde{\varphi})}{mtg(\beta - \tilde{\varphi}) + I \frac{2\pi}{sr}}. \quad (3.18)$$

Toto zrychlení je lineárn závislé na výchylce. Pro e-ení místa zastavení lisu $q = q_{max}$, $\dot{q} = 0$ pouflijeme základní kinematický vztah pro zrychlení (v je rychlost ve sm ru osy lisu)

$$a = \ddot{q} = \frac{d(v^2)}{2dq} = a_0 - \Omega^2 q. \quad (3.19)$$

Separaci prom nných provedeme tak, fle rovnici (3.19) vynásobíme dq a integrujeme

$$2 \int_0^q (a_0 - \Omega^2 q) dq = \int_{v_0^2}^{v^2} d(v^2). \quad (3.20)$$

Výsledkem je závislost mezi rychlostí a výchylkou

$$2a_0 q - \Omega^2 q^2 = v^2 - v_0^2. \quad (3.21)$$

Pro $v = \dot{q} = 0$ je (3.21) kvadratickou rovnicí pro q_{max} , která má tvar

$$\Omega^2 q_{max}^2 - 2a_0 q_{max} - v_0^2 = 0, \quad (3.22)$$

a její kladný ko en je

$$q_{max} = \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + \Omega^2 v_0^2}}{\Omega^2}. \quad (3.23)$$

Po áte ní rychlost $v_0 = \dot{q}(0)$ byla ur ena vztahem (3.3). Tím je vy e-eno maximální stla ení výlisku. Pro vy-et ení osového pohybu lisu v závislosti na ase znamená najít e-ení diferenciální rovnice 2. ádu (3.16a), které se skládá z homogenního e-ení (e-ení rovnice (3.16) s nulovou pravou stranou)

$$q_H(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \quad (3.24)$$

a partikulárního e-ení, které v tomto p ípad odhadneme podle tvaru pravé strany, tj. ve tvaru konstanty

$$q_P = C. \quad (3.25)$$

Tuto konstantu získáme dosazením (3.25) do rovnice s pravou stranou (3.16a)

$$\Omega^2 C = \frac{f_{red}}{m_{red}} \Rightarrow C = \frac{f_{red}}{m_{red} \Omega^2} = \frac{f_{red}}{k_{red}}. \quad (3.26)$$

Celkové e-ení pak pí-eme ve tvaru

$$q(t) = q_H(t) + q_P(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t + \frac{f_{red}}{k_{red}}. \quad (3.27)$$

Integra ní konstanty A a B získáme, dosadíme-li do rovnice (3.27) po áte ní podmínky. Proto derivujeme rovnici (3.27) podle t a máme vztah pro rychlost

$$\dot{q}(t) = -\Omega A \sin \Omega t + \Omega B \cos \Omega t. \quad (3.28)$$

Pro $t = 0$ dostanou rovnice (3.27) a (3.28) tvar

$$q(0) = q_0 = 0 = A + \frac{f_{red}}{k_{red}} \Rightarrow A = -\frac{f_{red}}{k_{red}}, \quad (3.29)$$

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_0 = \Omega B \Rightarrow B = \frac{\dot{q}_0}{\Omega}. \quad (3.30)$$

Nyní jiřl m ěme ve sv tle vztah (3.29) a (3.30) napsat e-ení (3.27) ve tvaru

$$q(t) = \frac{f_{red}}{k_{red}} (1 - \cos \Omega t) + \frac{\dot{q}_0}{\Omega} \sin \Omega t. \quad (3.31)$$

Budeme-li chtít vyjád ět e-ení v závislosti na zadaných parametrech, vezmeme do úvahy vztahy (3.3) a (3.15)

$$q(t) = \frac{mg}{k} (1 - \cos \Omega t) + s \frac{\omega_0}{2\pi\Omega} \sin \Omega t, \quad (3.32)$$

kde

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_{red}}{m_{red}}} = \sqrt{\frac{ktg(\beta - \tilde{\varphi})}{mtg(\beta - \tilde{\varphi}) + I \frac{2\pi}{sr}}} \quad (3.33)$$

je vlastní frekvence kmitání soustavy. S ohledem na nelinearitu t e-ích sil v závitu má smysl e-ení (3.31) jen v intervalu $q(t) \in \langle 0, q_{max} \rangle$, kde maximální výchylka q_{max} je daná vztahem (3.23).

P íklad 3.2

Proudový letoun prolétá zatá ku o polom ru R konstantní rychlostí v_0 . Letadlová turbína má konstantní úhlovou rychlost ω_0 , hmotnost m , osový moment setrva nosti I_o a dále jsou zadány geometrické parametry ulofení turbíny b a c . Na obr. 3.3 je znázorn ěno schéma ulofení této trubiny. Na-ím úkolem je vypo ítat reakce v lořliskách ulofení turbíny. V podstat se zde jedná o kinetostatickou úlohu, protože v-echny kinematické veli iny jsou zadány a cílem výpo tu je ur ění pot ebných sil.

e-ení provedeme základním rozkladem s referen ním bodem ve st edu hmotnosti turbíny. Představme si, ě se turbína pohybuje uná-ivým pohybem konstantní rychlostí st edu hmotnosti v_0 po kruřnici o polom ru R , tzn. bez jakékoliv rotace. Z tohoto d vodu je te ně zrychlení od uná-ivého pohybu nulové (pohyb hmotného bodu po kruřnici o polom ru R). Zbývá dost edivé zrychlení st edu hmotnosti, které má hodnotu

$$a_n = \frac{v_0^2}{R} = R \dot{\psi}^2, \quad \left(\dot{\psi} = \frac{v_0}{R} \right). \quad (3.34)$$

Tomu odpovídá odstředivá síla

$$D = mR\dot{\psi}^2 = m\frac{v_0^2}{R}, \quad (3.35)$$

která je na obr. 3.3 znázorněna modrou barvou. Nyní na unáivý posuvný pohyb superponujeme druhotný sférický pohyb. Vzhledem k faktu, že střed druhotného sférického pohybu je totožný se středem hmotnosti turbíny, bude teprve odstředivá síla od sférického pohybu nulová. Sférický pohyb je tvořen unáivou precesní rychlostí

$$\dot{\psi} = \frac{v_0}{R}, \quad (3.36)$$

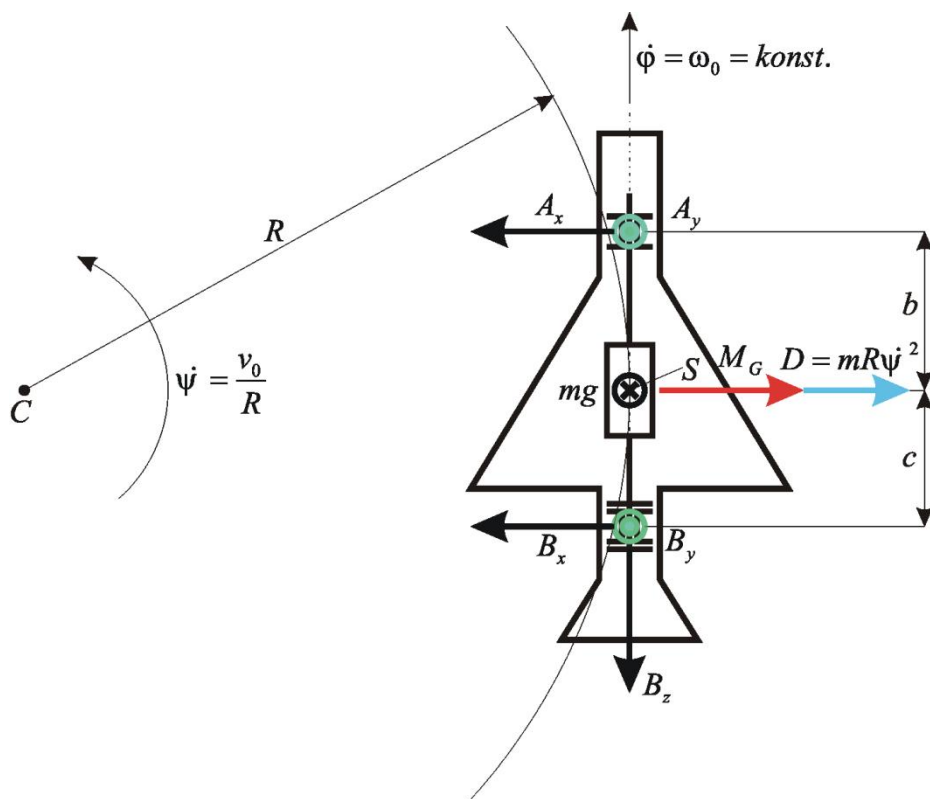
jejíž vektor má směr ven z nákresny (pravidlo pravé ruky). Druhotná vlastní rotace odpovídá úhlové rychlosti turbíny

$$\dot{\phi} = \omega_0 = \text{konst.}, \quad (3.37)$$

jejíž směr je zřejmý z obrázku. Úhel nutace ϑ je úhel, který svírá vektor vlastní rotace s vektorem precese, tzn. 90° . Zbývá určit setrvačný moment, který byl odvozen v kap. 2 vztahem (2.16). Zde všechny složky tohoto setrvačného momentu jsou nulové s výjimkou gyroskopického momentu, který určíme podle vztahu

$$\vec{M} = I_o \vec{\phi} \times \vec{\psi} \Rightarrow M_G = I_o \omega_0 \dot{\psi} = I_o \omega_0 \frac{v_0}{R}. \quad (3.38)$$

Směr gyroskopického momentu je znázorněn červenou šipkou v obr. 3.3



Obr. 3.3

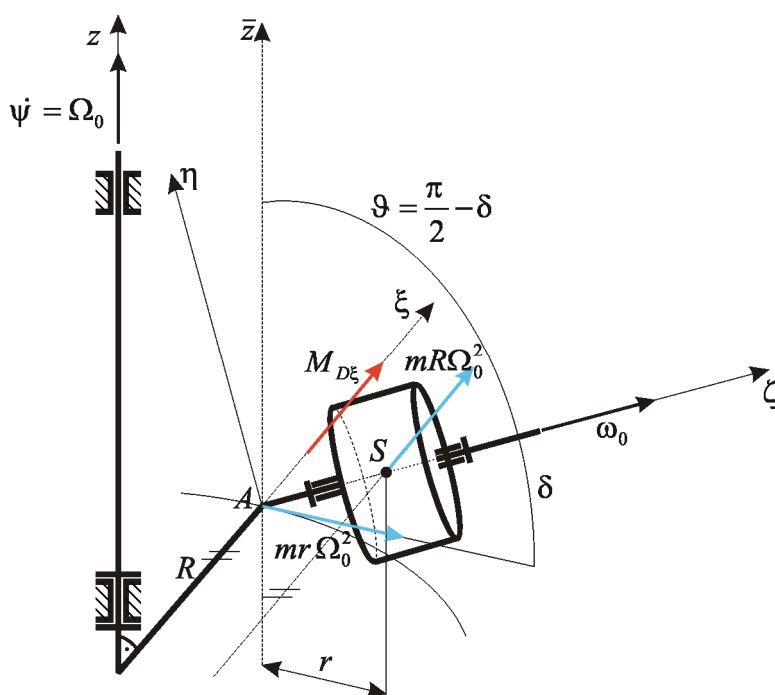
V obr. 3.3 bylo pro označení vektorů směřujících do resp. z náčrtu použito značení užívané v elektrotechnice, tzn. křížek resp. tečka v kroužku. Protože má těleso v prostoru 6° volnosti, píšeme pro něj 6 podmínek dynamické rovnováhy. V našem případě jich bude jen 5, protože momentová podmínka k ose rotace odpadá (je předepsána kinematická podmínka $\dot{\varphi} = \omega_0 = \text{konst.}$). Tyto podmínky mají tvar (momentové podmínky jsou psány k osám procházejícím středem hmotnosti turbíny)

$$\begin{aligned} B_z &= 0, \\ A_x + B_x - D &= 0, \\ A_y + B_y - mg &= 0, \\ A_x b - B_x c &= 0, \\ A_y b - B_y c + M_G &= 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Po dosazení za D a M_G ze vztahů (3.35) a (3.38) do (3.39) máme 5 lineárních algebraických rovnic pro 5 neznámých hodnot vazebních reakcí v ložiskách A_x, A_y, B_x, B_y, B_z . Tím je úloha vyřešena.

Příklad 3.3

Dalším příkladem je opět kinetostatická úloha, kde jsou všechny kinematické veličiny známy a naším úkolem bude určit setrvačné úhly. Na obr. 3.4 je znázorněn setrvačnický konající dv sou asné rotace kolem mimoběžných os z a ζ . Příslušné úhlové rychlosti jsou Ω_0 a ω_0 a ob jsou konstantní. Úhel sklonu δ , který svírá osa ζ se svým průměrným průmětem viz obr. 3.4 je rovněž konstantní.



Obr. 3.4

Výsledný pohyb je obecný prostorový. Vy-et ení setrva ných ú ink provedeme op t základní rozkladem, tj. rozkladem na uná-ivý pohyb posuvný rychlostí a zrychlením referen ního bodu A a na druhotnou sférickou rotaci kolem tohoto bodu. Tuto sférickou rotaci op t vyjád íme uná-ivou precesí Ω_0 p enesenou na osu \bar{z} a vlastní rotací ω_0 kolem osy ζ . Osu ζ zvolíme tak, aby byla totofná s osou vlastní rotace, osu ξ zvolíme tak, aby rotací okolo ní p e-la osa \bar{z} do osy ζ a poslední osu η doplníme tak, aby celý sou adnicový systém ξ, η, ζ byl pravoto ivý. Jak je z ejmé z obr. 3.4, úhel nutace \mathcal{G} je dopl kovým úhlem do 90° k úhlu δ a je také konstantní.

a) uná-ivý pohyb posuvný

P edstavme si, fle se setrva ník pohybuje uná-ivým pohybem posuvným rychlostí a zrychlením referen ního bodu A. Protofle je Ω_0 konstantní, má bod A jen dost edivé zrychlení

$$a_{nA} = R\Omega_0^2, \quad a_{tA} = 0. \quad (3.40)$$

Tomu odpovídá setrva ná síla

$$D_{nU} = mR\Omega_0^2, \quad (3.41)$$

jejífl orientace a p sobí-t je znázorn no na obr. 3.4. Zde je t eba si uv domít, fle p i uná-ivém pohybu posuvném je p sobí-t m v-ech setrva ných sil st ed hmotnosti. Te ná setrva ná síla od uná-ivého pohybu posuvného je v d sledku druhého vztahu (3.40) nulová.

b) druhotný pohyb sférický

Tento pohyb je superponován na uná-ivý pohyb posuvný. To znamená, fle uná-ivá precese $\dot{\psi} = \Omega_0$ se p esune z osy z na osu \bar{z} . Setrva ná síla od uná-ivé precese p sobí ve st edu sférického pohybu A a má sm r odst edivé síly od rota ního pohybu okolo osy \bar{z} úhlovou rychlostí Ω_0 , tj. kolmice spu-t né z osy \bar{z} do st edu hmotnosti setrva níku. Její velikost je úm rná kolmé vzdálenosti st edu hmotnosti setrva níku od osy \bar{z} , tj. r a m fleme jí vyjád it ve tvaru

$$D_{nS} = mr\Omega_0^2. \quad (3.42)$$

Te ná setrva ná síla od uná-ivé precese je v d sledku konstantní úhlové rychlosti Ω_0 nulová. Zbývá ur it setrva ný moment od druhotné sférické rotace. Podle vztahu (3.38) je jen jedna sloflka nenulová a ostatní jsou nulové, tzn., fle

$$M_{D\xi} = -I_o\omega_0 \underbrace{\sin \mathcal{G}}_{\cos \delta} - (I_o - I_1)\Omega_0^2 \underbrace{\sin \mathcal{G} \cos \mathcal{G}}_{\cos \delta \sin \delta}, \quad M_{D\eta} = M_{D\zeta} = 0, \quad (3.43)$$

kde I_1 je moment setrva nosti setrva níku k osám ξ a η . První len v prvním ze vztah (3.43) p edstavuje op t gyroskopický moment, který lze vyjád it vztahem

$$\mathbf{M}_G = I_o \dot{\phi} \times \dot{\psi} = I_o \omega_0 \times \Omega_0 \Rightarrow M_G = I_o \omega_0 \Omega_0 \sin \mathcal{G} = I_o \omega_0 \Omega_0 \cos \delta. \quad (3.44)$$

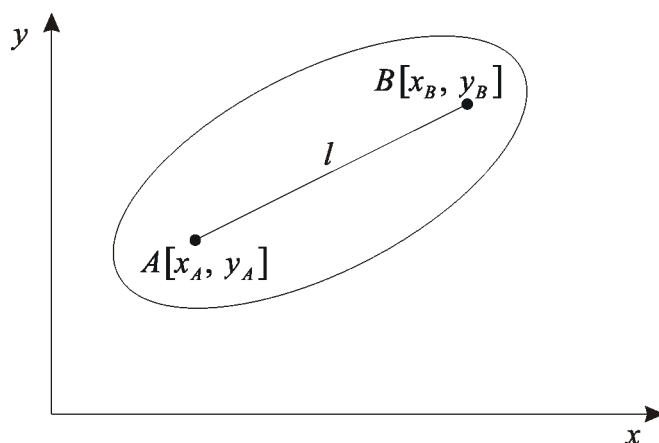
Tím jsou v-echny setrva né ú ink zakreslené v obr. 3.4 vysv tleny.

4. Základy analytické mechaniky

4.1. Klasifikace mechanických soustav

V tomto u ebním textu budeme termínem zobecn ná sou adnice myslet sou adnici udávající polohu t lesa nebo soustav t les bez ohledu na to, zda jde o délkovou nebo úhlovou sou adnici a bez ohledu na souvislost t chto sou adnic s po tem stup volnosti n . Po tem stup volnosti máme na mysli po et nezávislých pohyb , které je schopno t leso nebo soustava t les vykonat. Popis soustav budeme d lit do dvou skupin:

a) Poloha soustavy je popsána pomocí $m > n$ zobecn ných sou adnic. Pak musí být dodáno $r = m - n$ vazebních podmínek (zkrácen vazeb). Jako p íklad si m fleme uvést t leso na obr. 4.1



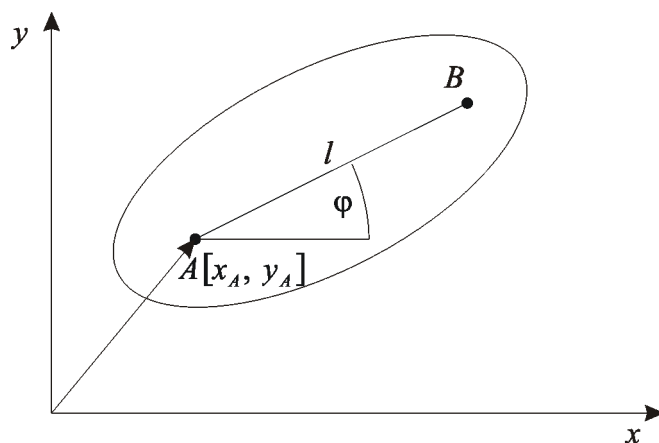
Obr. 4.1

Jeho poloha je popsána ty mi zobecn nými sou adnicemi x_A, y_A, x_B, y_B . Jak známo, t leso má v rovin $n = 3$ stupn volnosti. Proto musí být tyto sou adnice vázány podmínkou tuhosti úse ky

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2. \quad (4.1)$$

To znamená, fle $m = 4, n = 3$ a $r = m - n = 1$. Kdyby nebyla zadána vazební podmínka, nikde by nebyla zaji-t na podmínka pevné vzdálenosti bod A a B.

b) Poloha soustavy je popsána pomocí n zobecn ných sou adnic, tj. po tem sou adnic odpovídajícím po tu stup volnosti (ídicích sou adnic).



Obr. 4.2

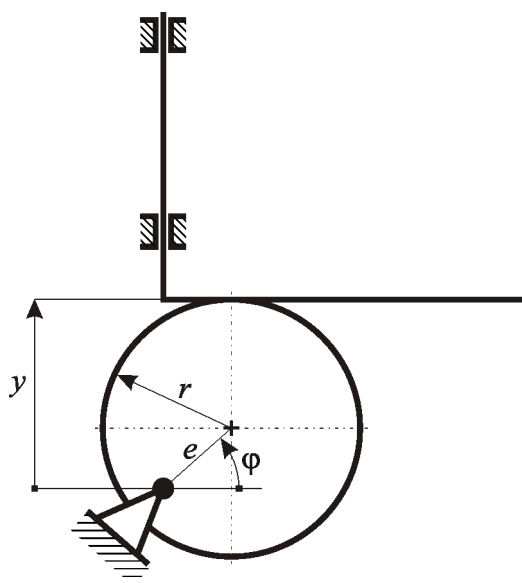
Jako vhodný příklad si můžeme uvést těleso na obr. 4.2, jehož poloha v rovině je jednoznačně popsána těmi (úhly) zobecněnými souřadnicemi x_A , y_A a φ . V tomto případě $m = n = 3$ a počet vazebních podmínek $r = m - n = 0$.

Podle počtu stupňů volnosti můžeme také soustavy rozdělit na soustavy

- a) kontinuální (kontinuum), které mají $n \rightarrow \infty$ stupňů volnosti, a
- b) diskrétní, které mají $n < \infty$ stupňů volnosti.

Pro další klasifikaci si uvedeme 3 druhy soustav, jejichž poloha bude popsána nadbytečným počtem souřadnic $m > n$ a příslušnými vazbovými podmínkami.

- 1) Na obr. 4.3 je znázorněn mechanismus s harmonickou vazbou. Příklad šarhounkové vyjde z tvaru vazební podmínky.



Obr. 4.3

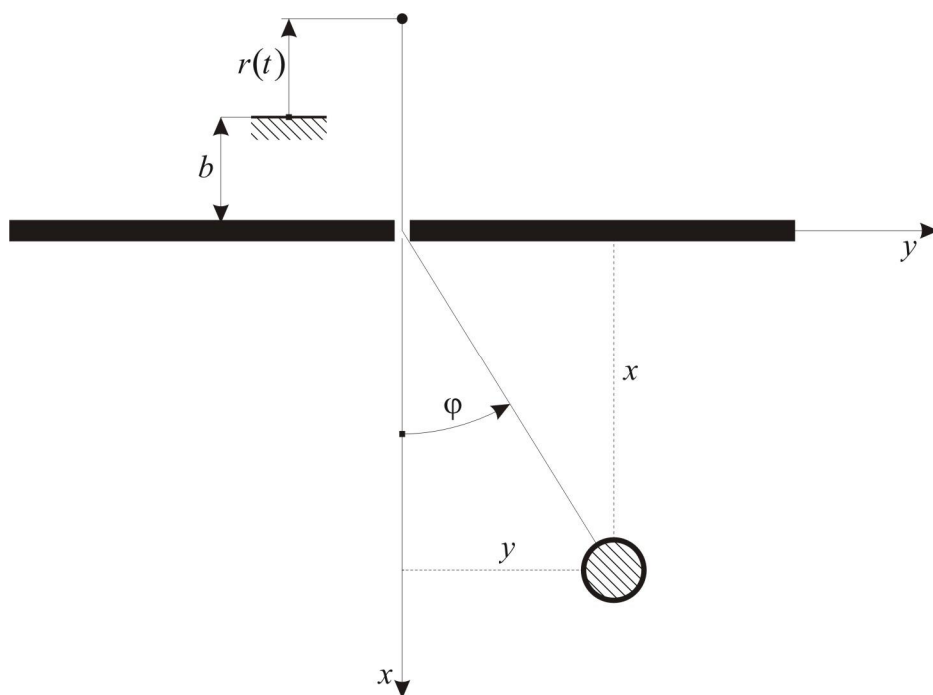
Jeho poloha je popsána dvěma zobecněnými souřadnicemi φ a y , avšak počet stupňů volnosti, jak se každý z nich pohybuje, je jedna. Proto mezi těmito souřadnicemi existuje vazbová rovnice. Tuto rovnici si můžeme uvést jak v integrální, tak v diferenciální formě. Integrální resp. diferenciální forma je

$$y = e \sin \varphi + r, \quad \text{resp.} \quad dy = e \cos \varphi d\varphi. \quad (4.2)$$

Povšimneme si, že ani v integrální ani v diferenciální formě vazební podmínky není explicitně obsažen čas.

- 2) Jako další příklad si uvedeme soustavu na obr. 4.4. Jedná se o kyvadlo s proměnnou délkou kyvadla. Soustava má $n = 2$ stupňů volnosti, které je možno vyjádřit například souřadnicemi $r(t)$ a $\varphi(t)$. V případě, že pohyb $r(t)$ je předepsán, jedná se o kinematické buzení. Jestliže je poloha soustavy popsána $m = 3$ souřadnicemi $r(t)$, x , y viz obr. 4.4, je třeba dodat ještě jednu vazební podmínku ($r = m - n = 3 - 2 = 1$), která vyjadřuje tuhost vlákna konstantní délky l_0 ve tvaru

$$x^2 + y^2 - [l_0 - r(t) - b]^2 = 0, \quad (4.3)$$



Obr. 4.4

což je její integrální tvar. P íslu-né diferenciální vyjád ení vazební podmínky má tvar

$$x dx + y dy - [l_0 - r(t) - b] \underbrace{\dot{r}(t)}_{dr(t)} dt = 0. \quad (4.4)$$

Má-li sou adnice $r(t)$ p edepsaný pr b h nap . ve tvaru $r(t) = r_0 \sin \omega t$, dostane rovnice (4.4) tvar

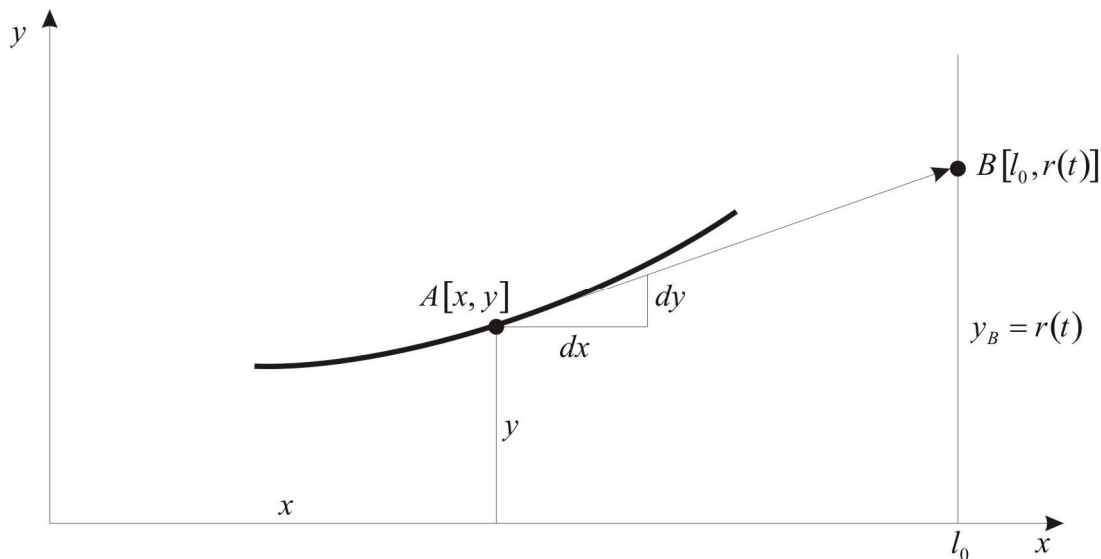
$$x dx + y dy + [l_0 - r_0 \sin \omega t - b] r_0 \omega \cos \omega t dt = 0. \quad (4.5)$$

Nyní si v ímn me, fle v obou formách vazební podmínky je explicitn obsažen as.

3) T etím p íkladem soustavy je bod pohybující se po špsí k ivce viz obr. 4.5, tj. po takové k ivce, jejíž te na bude v každém okamžiku sm ovat do bodu B , který se pohybuje p edepsaným pohybem po p ímce $x = l_0$. Název k ivky vznikl podle chování psa, který sleduje cyklistu jedoucího po cest . Bod má v rovin 2 stupn volnosti, av-ak jeho dráha je popsána t emi sou adnicemi $dx, dy, r(t)$ (dv jsou dány p ír stky). Vazební podmínka plyne z podobnosti trojúhelník

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r(t) - y}{l_0 - x} \Rightarrow (l_0 - x) dy - [r(t) - y] dx = 0. \quad (4.6)$$

Jak je z ejmé z tvaru vazební podmínky (4.6), nebude ji možné vyjád it v integrální form , proto fle výraz na levé stran etvo í totální diferenciál a tudí fl levou stranu není možné integrovat.



Obr. 4.5

Díl í záv r: Věchny vazební rovnice zapsané v diferenciálním tvaru m fme obecn vyjád ít pomocí tzv. Pfaffovy formy (v p ípad ě jedné vazební rovnice)

$$\sum_{i=1}^m a_i dx_i + a_0 dt = 0, \quad (4.7)$$

kde m je op t po et zobecn ěných sou adnic ur ujících polohu soustavy. Obecn m fme být v soustav ě $r = m - n$ ($r < m$) vazbových rovnic zapsaných v Pfaffov ě form ě

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} dx_i + a_{0j} dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (4.8)$$

cof m fme být zapsáno v maticovém tvaru

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \mathbf{a}_0(\mathbf{x}, t) dt = 0. \quad (4.9)$$

Jak je z ejmé z rovnice (4.9), koeficienty u diferenciál ů sou adnic a ůsu jsou obecn funkcemi p íslu-ných sou adnic a ůsu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m,1}, \quad d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m,1}, \quad \mathbf{A}^T(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^{j,m}, \quad \mathbf{a}_0(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^{r,1}. \quad (4.10)$$

Nyní se dostáváme k deklarované klasifikaci mechanických diskrétních soustav.

a) Jsou-li vazby integrovatelné, m fme rovnici (4.9) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad (4.11)$$

p íslu-né vazby a celou soustavu nazveme **holonomní**. Jestliffe se vrátíme k uvedeným t ěm typ m soustav, m fme za adit do kategorie šholonomníů soustavy 1) a 2). Jejich vazby je možné vyjád ít v integrální i diferenciální form ě. Naopak soustava 3) (psí k ívka) je **neholonomní**, protože vazbová podmínka existuje jen v diferenciální form ě.

b) Dalším kritériem je stacionarita. Jestliže vazbové podmínky neobsahují explicitně čas, tzn., že v rovnici (4.9) je

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

nazveme vazby a celou soustavu **skleronomní (stacionární, časově nezávislou)**. Podle tohoto kritéria je soustava 1) skleronomní, avšak ostatní dvě soustavy jsou **reonomní (nestacionární, časově závislé)**.

Předpokládejme pro tento okamžik, že vyšetřovaná soustava je skleronomní (stacionární bez explicitně obsaženého času). Nyní se nám zobecněné souadnice v pořadí n nezávislých a následně r závislých a podobně rozdělíme matici $\mathbf{A}^T(\mathbf{x}, t)$ na odpovídající bloky do tvaru

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, t)], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^{r,n}, \quad \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^{r,r}, \quad \mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^{n,1}, \quad \mathbf{x}_z \in \mathbf{R}^{r,1}.$$

Rovnici (4.9) můžeme nyní přepsat do tvaru

$$[\mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, t)] \begin{bmatrix} d\mathbf{x}_n \\ d\mathbf{x}_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.13)$$

a pak rozepsat po blocích

$$\mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}_n + \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}_z = \mathbf{0}. \quad (4.14)$$

Za předpokladu, že je matice $\mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, t)$ regulární, můžeme vyjádřit diferenciální přírůstky závislých souadnic na nezávislých ve tvaru

$$d\mathbf{x}_z = -\mathbf{A}_2^{-T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}_n. \quad (4.15)$$

Tohoto vztahu níže využijeme při odvození Lagrangeových rovnic s omezeními.

4.2. Princip virtuálních prací (PVP)

Zmíněný princip si uvedeme jako axióm vycházející z podmínek rovnováhy. Nejdříve si definujeme tzv. virtuální posuv. Jedná se o diferenciální přírůstek n které z m souadnic, kterými je poloha soustavy popsána. Bude-li platit m podmínek rovnováhy soustavy

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

pak pochopitelně platí i identita

$$\left(\sum_i \mathbf{F}_i \right) \cdot \delta \mathbf{x} = 0, \quad (4.17)$$

kde $\delta \mathbf{x}$ je libovolný vektor takové dimenze, aby bylo možné provést skalární násobení. Poslední rovnici můžeme maticově zapsat ve tvaru

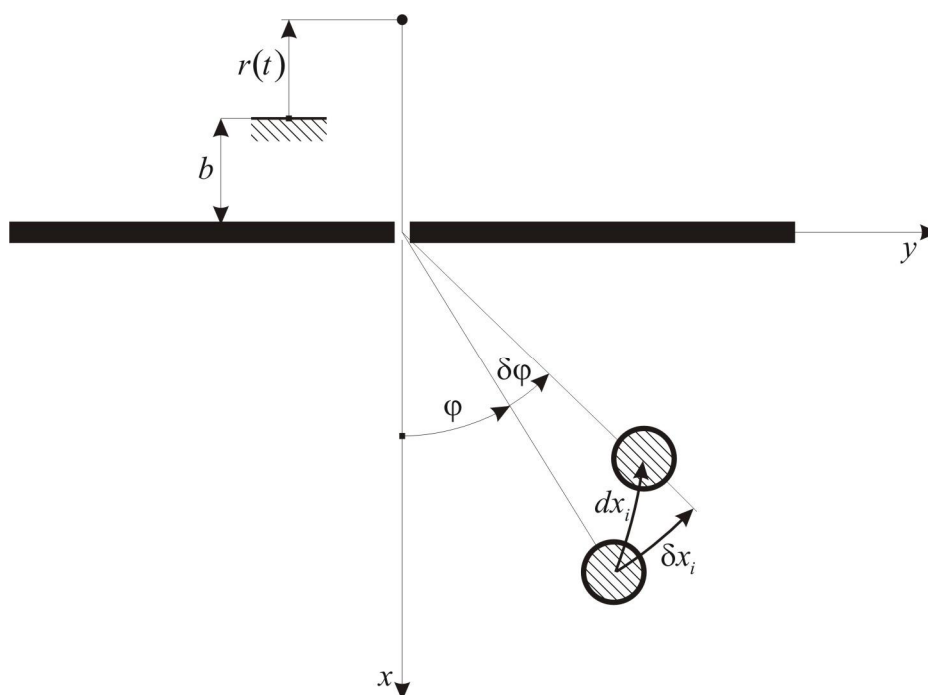
$$\left(\sum_i \mathbf{F}_i \right)^T \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{x}^T \left(\sum_i \mathbf{F}_i \right) = 0. \quad (4.18)$$

Na vektor $\delta \mathbf{x}$ se můžeme dívat jako na vektor diferenciálních malých posunutí. Pak výsledný skalární součin představuje práci všech sil působících na soustavu, která je v důsledku rovnováhy (statické i dynamické) nulová. Předpokládáme si, že soustava má n° volnosti, kde $n \leq m$. Pokud platí $m > n$, je nutno k popisu polohy soustavy dodat ještě $r = m - n$ vazebních podmínek. Jestliže jsou virtuální posuvy nezávislé $m = n$, $r = 0$, musí být i jednotlivé součiny tvořící skalární součin (4.17), (4.18) nulové.

Slovně můžeme být PVP vyjádřit takto:

Je-li soustava v rovnováze (v dynamické nebo statické), pak virtuální práce všech sil působících na soustavu je rovna nule.

Označení $\delta \mathbf{x}$ pro vektor diferenciálních posuvů může odpovídat skutečným diferenciálním posuvům $d\mathbf{x}$ v případě stacionárních soustav. V případě nestacionárních soustav tomu tak být nemusí. Na obr. 4.6 je znázorněn skutečný posuv dx_i , který je ovlivněn i časovou změnou $r(t)$ a který neodpovídá virtuálnímu posuvu δx_i . Z tohoto důvodu budeme vždy soustavám udílat takovou virtuální změnu souřadnic (virtuální posuv), aby nebyla ovlivněna časová změna. Taková virtuální změna souřadnic se nazývá izochronní variace.



Obr. 4.6

Vraťme se ještě k poznámce: *Jestliže jsou virtuální posuvy nezávislé, musí být i jednotlivé součiny tvořící skalární součin (4.17), (4.18) nulové*. Pak výrazy u jednotlivých virtuálních posuvů v rovnici (4.18) musí být nulové, což představuje $m = n$ rovnic. Tyto rovnice jsou v případě statického problému podmínkami rovnováhy, v případě dynamického problému pohybovými rovnicemi. Praktický postup spočívá v tom, že soustavám udělíme postupně m virtuálních posuvů (jeden bude vždy nenulový, zatímco ostatní budou nulové) a výslednou tzv. virtuální práci těchto sil položíme rovnu nule. Jako aplikaci na PVP si uvedeme dva příklady, kdy $m = n$. Na tomto místě připomeneme dvě hlavní zásady při modelování:

- 1) Ve mechanice značíme vždy polohu tělesa (bodu) souřadnicí orientovanou od pevného bodu (pro vodič v případě rotačního pohybu) k pohyblivému bodu (pro vodiči).
- 2) Stejným směrem, jaký má souřadnice polohy, mají i její časové derivace a virtuální změny.

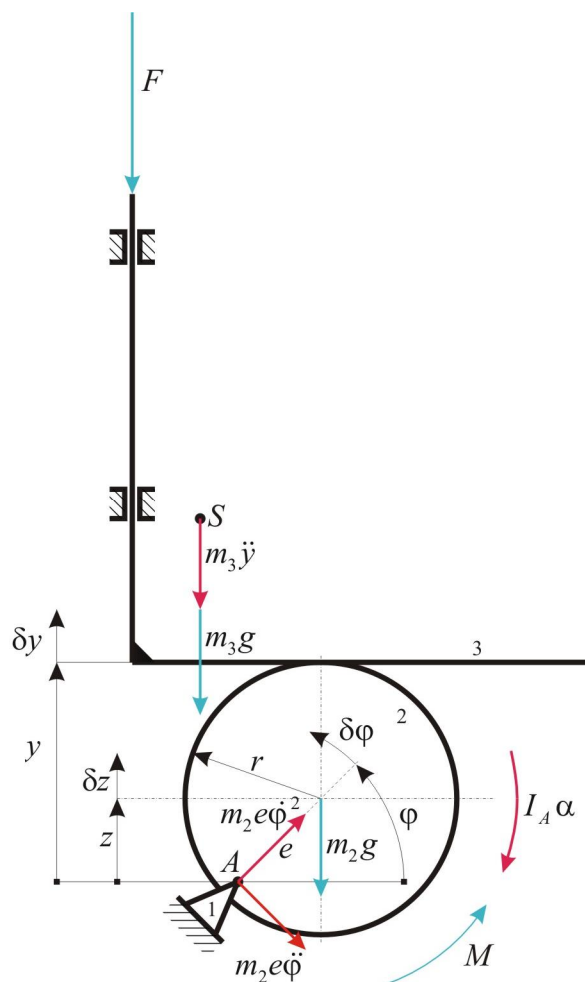
4.2.1 Aplikace PVP pro soustavy popsané úhlovými zobecněnými souřadnicemi ($m=n$)

Příklad 4.1

Na obr. 4.7 je znázorněn mechanismus s harmonickou vazbou, jehož pohybovou rovnici chceme sestavit. Východiskem je určení početnosti volnosti podle vztahu

$$i = 3 \times (3 - 1) - 2(p + r + v) - o = 6 - 2(0 + 1 + 0) - 3 = 1. \quad (4.19)$$

Jestliže zvolíme popis polohy soustavy pomocí jedné souřadnice, pak $m = n = 1$. Proto budeme sestavovat jednu pohybovou rovnici. Jako jednu nezávislou zobecněnou souřadnici zvolíme úhel natočení vaky φ . Pak je třeba všechny ostatní souřadnice a jejich časové derivace a virtuální změny vyjádřit pomocí φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ a $\delta\varphi$.



Obr. 4.7

Poznámka:

Metody analytické mechaniky (i dal-í, o kterých se zmíníme nífle) mají hlavní výhodu, která spo ívá v tom, fle výsledkem jejich aplikace jsou p ímo pohybové rovnice. Není t eba sestavovat pracné podmínky rovnováhy, ve kterých figurují jako neznámé téfl vazební reakce. Paklífle jde o ideální vazby, pak tyto reakce nekonají práci a poufítí metod analytické mechaniky je výhodné. V p ípad reálných vazeb (vazeb s pasívními ú ínk) se tato výhoda ztrácí, protofle vyjád ení práce pasívních ú ínk m fle být velmi obtíflné.

Na-e soustava budífl bez pasívních ú ínk . Ud líme soustav virtuální posunutí $\delta\varphi$ a protofle jsme se rozhodli pro popis pomocí jediné sou adnice, dojde i k závislým virtuálním posuv m δy a δz , které snadno vypo teme diferencováním vztah

$$\begin{aligned} y &= e \sin \varphi + r \Rightarrow \delta y = e \cos \varphi \delta \varphi, \\ z &= e \sin \varphi \Rightarrow \delta z = e \cos \varphi \delta \varphi. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Podobn dostaneme i asovou derivaci

$$y = e \sin \varphi + r \Rightarrow \ddot{y} = e \ddot{\varphi} \cos \varphi - e \dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \quad (4.21)$$

Pak m fleme virtuální práci v-ech sil p sobící na danou soustavu zapsat ve tvaru

$$(M - I_A \ddot{\varphi}) \delta \varphi - (F + m_3 g + m_3 \ddot{y}) \delta y - m_2 g \delta z = 0. \quad (4.22)$$

Do této rovnice dosadíme (4.20) a (4.21) a dostaneme

$$(M - I_A \ddot{\varphi}) \delta \varphi - [F + m_3 g + m_3 e \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_3 e \dot{\varphi}^2 \sin \varphi] e \cos \varphi \delta \varphi - m_2 g e \cos \varphi \delta \varphi = 0. \quad (4.23)$$

Virtuální zm na $\delta \varphi$ je diferenciáln malá, av-ak nenulová, takfle celou rovnici (4.23) vykrátíme $\delta \varphi$ a dostaneme

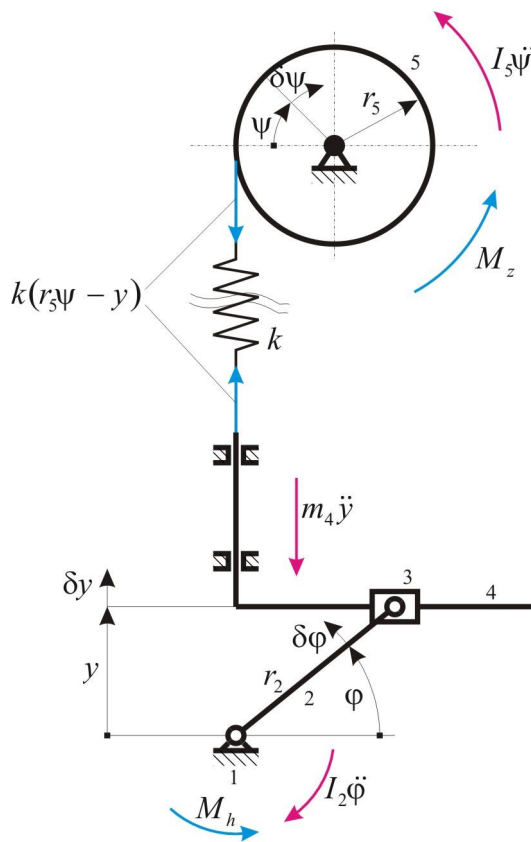
$$\boxed{M - I_A \ddot{\varphi} - [F + m_3 g + m_3 e \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_3 e \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + m_2 g] e \cos \varphi = 0,} \quad (4.24)$$

cofl je pohybová rovnice daného mechanismu. Sestavení pohybové rovnice je vfdy východiskem pro e-ení dynamického problému. Dal-í otázkou z stává, co je cílem e-ení. Je-li cílem e-ení pohybové rovnice pohyb mechanismu (úloha vlastní dynamiky), nap . rozb h, je t eba e-ít rovnici (4.24) vzhledem k φ , cofl je siln nelineární diferenciální rovnice, kterou u v t-íny mechanism s prom nným p evodem neumíme e-ít analyticky. Pak jedinou možnou cestou k e-ení tohoto problému je numerické e-ení. Popis numerických metod pro e-ení diferenciální rovnice (4.24) p esahuje rozsah tohoto textu. tená e m fleme odkázat nap . na literaturu [5]. Jiná situace nastane, je-li dána kinematická veli ína φ jako funkce asu nebo n která její asové derivace, nap . $\dot{\varphi}(t) = \omega_0$ (kinetostatická úloha). Pak se rovnice (4.24) stává algebraickou rovnicí pro ur ení silové veli íny, nap . M (je-li F p edepsána bu jako funkce φ nebo t) pro spln ní pr b hu p edepsané kinematické veli íny.

P íklad 4.2

Na obr. 4.8 je znázorn na soustava s 2° volnosti. Pro zjednodu-ení budeme p edpokládat, fle její pohyb probíhá ve vodorovné rovin a zanedbáme hmotnost lenu 3. Pokud se rozhodneme e-ít pohyb soustavy v prostoru ídicích zobecn ných sou adnic, budou výsledkem aplikace principu virtuálních prací dv pohybové rovnice. Jako ídicí zobecn né sou adnice vybereme úhly φ a ψ . Potom sou adnice y , její asové derivace i virtuální p ír stek musí být vyjád eny

pomocí ídicích zobecněných souadnic. Zde je třeba poznamenat, že tento přístup je výhodný zejména v případech, kdy závislé souadnice je možné explicitně vyjádřit pomocí ídicích zobecněných souadnic.



Obr. 4.8

To je v našem případě možné derivací a diferencováním výrazu

$$y = r_2 \sin \varphi \Rightarrow \ddot{y} = r_2 \ddot{\varphi} \cos \varphi - r_2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \quad \delta y = r_2 \cos \varphi \delta \varphi. \quad (4.25)$$

Protože má soustava 2° volnosti a ídicí zobecněné souadnice jsou φ a ψ , udělíme nejprve soustavě virtuální posuv $\delta \varphi \neq 0$, $\delta \psi = 0$. Virtuální práce všech silových úinků musí být rovna nule a můžeme ji zapsat ve tvaru

$$(M_h - I_2 \ddot{\varphi}) \delta \varphi - m_4 \ddot{y} \delta y + k(r_5 \psi - y) \delta y = 0. \quad (4.26)$$

Po dosazení (4.25) do poslední rovnice dostaneme

$$(M_h - I_2 \ddot{\varphi}) \delta \varphi - m_4 (r_2 \ddot{\varphi} \cos \varphi - r_2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) r_2 \cos \varphi \delta \varphi + k(r_5 \psi - r_2 \sin \varphi) r_2 \cos \varphi \delta \varphi = 0 \quad (4.27)$$

a po vykrácení $\delta \varphi$ dostaneme první pohybovou rovnici ve tvaru

$$\boxed{M_h - I_2 \ddot{\varphi} - m_4 (r_2 \ddot{\varphi} \cos \varphi - r_2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) r_2 \cos \varphi + k(r_5 \psi - r_2 \sin \varphi) r_2 \cos \varphi = 0.} \quad (4.28)$$

Podobným způsobem budeme postupovat i v případě druhé ídicí souadnice. Udělíme soustavě virtuální posuv $\delta \varphi = 0$, $\delta \psi \neq 0$. Pak virtuální práce všech silových úinků působících na soustavu bude

$$-(M_z + I_5 \ddot{\psi}) \delta \psi - k(r_5 \psi - y) r_5 \delta \psi = 0. \quad (4.29)$$

Po dosazení za y ze vztahu (4.25) do poslední rovnice a vykrácení celé rovnice $-\delta\psi$ dostaneme druhou pohybovou rovnici ve tvaru

$$\boxed{M_z + I_5 \ddot{\psi} + kr_5^2 \psi - kr_2 r_5 \sin \varphi = 0.} \quad (4.30)$$

Soustava dvou diferenciálních rovnic (4.28) a (4.30) je řešitelná jen numerickou cestou. Vzhledem k faktu, že druhé derivace jsou v těchto rovnicích obsaženy šlineárně, můžeme rovnice vyjádřit ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_2 + m_4 r_2^2 \cos^2 \varphi} [M_h + m_4 r_2^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + k(r_5 \psi - r_2 \sin \varphi) r_2 \cos \varphi] \\ \frac{1}{I_5} (kr_2 r_5 \sin \varphi - M_z - kr_5^2 \psi) \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

což můžeme maticově zapsat ve tvaru

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad (4.32)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_2 + m_4 r_2^2 \cos^2 \varphi} [M_h + m_4 r_2^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + k(r_5 \psi - r_2 \sin \varphi) r_2 \cos \varphi] \\ \frac{1}{I_5} (kr_2 r_5 \sin \varphi - M_z - kr_5^2 \psi) \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Budeme-li chtít aplikovat nějakou standardní proceduru pro řešení soustavy diferenciálních rovnic, je vhodné soustavu (4.32) převést na dvojnásobnou soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu. Položíme

$$\mathbf{y}_1 = \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}. \quad (4.34)$$

Pak soustavu (4.32) přepíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_1 &= \mathbf{g}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \\ \dot{\mathbf{y}}_2 &= \mathbf{y}_1. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Dvě soustavy diferenciálních rovnic (4.35) pak můžeme přepsat do kompaktního tvaru

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}), \quad (4.36)$$

$$\text{kde } \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Pro soustavu rovnic ve standardním tvaru (4.36) existují běžné procedury numerické integrace, které jsou součástí programového SW vybavení jako např. MATLAB nebo MATHEMATICA.

4.2.2 Aplikace PVP pro soustavy popsané zobecněnými souadnicemi ($m > n$)

Je-li poloha soustavy popsána pomocí $m > n$ zobecněných souadnic, existuje mezi závislými a nezávislými souadnicemi Pfaffova forma (4.9), kterou vzhledem k izochronní variaci $\delta t = 0$ zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{A}^T \delta \mathbf{x} = [\mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, t)] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_n \\ \delta \mathbf{x}_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.38)$$

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, t)], \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_z \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1^T(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^{r,n}, \mathbf{A}_2^T(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^{r,r}, \mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^{n,1}, \mathbf{x}_z \in \mathbf{R}^{r,1}$$

Připomejme, že $\mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^n$ jsou účinnými zobecněnými souadnicemi, zatímco $\mathbf{x}_z \in \mathbf{R}^r$ ($r = m - n$) jsou závislé (nadvýměnné) souadnice. Matice $\mathbf{A}^T(\mathbf{x}, t)$ již byla definována vztahem (4.13).

Poznámka:

Zde se nabízí otázka, proč pracovat s v t-ím po tem souadnic m , než je po et účinných souadnic n (po et stup volnosti). Odpově zní: š V n kterých p ípadech není možné závislé souadnice vyjád it explicitn pomocí účinných souadnic. V takovém p ípad by nebylo možné vyjád it derivace nebo virtuální zm ny závislých souadnic pomocí účinných souadnic, jejich derivací a virtuálních zm n.

Vztah (4.16) můžeme napsat ve tvaru

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{D} + \mathbf{F}_v = \mathbf{0}, \quad (4.39)$$

kde

$$\mathbf{F}_a = \sum_i \mathbf{F}_{ai}, \text{ resp. } \mathbf{D} = \sum_i \mathbf{D}_i, \text{ resp. } \mathbf{F}_v = \sum_i \mathbf{F}_{vi} \quad (4.40)$$

jsou výsledné ak ní resp. setrva né resp. vazební zobecněné síly působící šve sm rechů jednotlivých m zobecněných souadnic. Najd íve napí-eme vztah pro virtuální práci v-ech sil (4.39), což je identita

$$\delta \mathbf{x}^T (\mathbf{F}_a + \mathbf{D} + \mathbf{F}_v) = 0. \quad (4.41)$$

Virtuální práce vazebních sil působících v ideálních vazbách je nulová, tzn., že $\delta \mathbf{x}^T \mathbf{F}_v = 0$.

Nyní přepí-eme vztah (4.38) do tvaru (rovnici (4.38) transponujeme)

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (4.42)$$

Rovnice (4.42) představuje r rovnic na ádku (švedle sebe). Jestliže tyto rovnice mají být závislé, musí být existovat jejich lineární kombinace rovnající se nule. Tzn., že existuje vektor lineární kombinace , pro který platí

$$\delta \mathbf{x}^T \mathbf{A} = 0. \quad (4.43)$$

Se teme-li rovnice (4.41) a (4.43) a respektujeme-li $\delta \mathbf{x}^T \mathbf{F}_v = 0$, dostaneme

$$\boxed{\delta \mathbf{x}^T (\mathbf{F}_a + \mathbf{D} + \mathbf{A}) = 0.} \quad (4.44)$$

Nyní již musí být splněna každá z rovnic obsažená v soustavě (4.44), tzn., že

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{D} + \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (4.45)$$

Tím se dostáváme k soustavě m diferenciálních rovnic pro $m + r$ neznámých $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^r$. K této soustavě je třeba přidat vazební podmínku (4.38)

$$\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (4.46)$$

Díle-li tuto rovnicí δt , dostáváme

$$\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (4.47)$$

Tento vztah derivujeme podle času a dostaneme

$$\boxed{\mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{x}} = -\dot{\mathbf{A}}^T \dot{\mathbf{x}}.} \quad (4.48)$$

Rozdělíme každou sílu na vnější (externí) a síly závislé na zobecněných souřadnicích a čas podle schématu

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{f}_e(t) - \mathbf{f}_N(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t). \quad (4.49)$$

Dále máme setrvačné síly, které jsou lineární funkcí vektoru zobecněných zrychlení $\ddot{\mathbf{x}}$ a mohou být nelineární funkcí vektoru zobecněných rychlostí a výchylek $\dot{\mathbf{x}}$ a \mathbf{x} , vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{D} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}). \quad (4.50)$$

Pak máme rovnici (4.45) přepsat s ohledem na (4.49) a (4.50) do tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} = \mathbf{f}_e(t) - \mathbf{f}_N(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) - \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}). \quad (4.51)$$

Tuto rovnici společně s rovnicí (4.48) přepíšeme do kompaktního tvaru

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{M}, & \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A}^T(\mathbf{x}), & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e(t) - \mathbf{f}_N(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) - \mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \\ -\dot{\mathbf{A}}^T \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}} \quad (4.52)$$

Poslední rovnice je soustava algebro-diferenciálních rovnic. Na které možnosti jejího řešení si ukážeme později.

Poznámka:

Praktická realizace této metodiky probíhá takto:

a) Soustavu (4.44) uděláme vzhledy jeden virtuální posuv nenulový a ostatní virtuální posuvy položíme rovny nule-tím po vykrácení příslušným posuvem získáme m rovnic

b) Ke každé rovnici připojíme soustavu (4.48) a tím získáme celou soustavu algebro-diferenciálních rovnic

Příklad 4.3

Sestavme pohybovou rovnici soustavy na obr. 4.8 tak, že počet zobecněných souřadnic bude $m = 3$, (φ, ψ, y) . Vektor zobecněných souřadnic a jeho virtuálních přírůstků přepíšeme ve tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ y \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \varphi \\ \delta \psi \\ \delta y \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Protože počet volnosti je $n = 2$, je třeba dodat $r = m - n = 1$ vazební podmínku

$$y - r_2 \sin \varphi = 0. \quad (4.54)$$

Pfaffovu formu získáme diferencováním vazební podmínky (4.54), takže dostaneme

$$dy - r_2 \cos \varphi \delta \varphi = 0. \quad (4.55)$$

Poslední výraz máme přepsat do maticového tvaru

$$\mathbf{A}^T \delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -r_2 \cos \varphi, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varphi \\ \delta \psi \\ \delta y \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -r_2 \cos \varphi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Derivací matice \mathbf{A} podle času získáme

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} r_2 \dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Dosazením do (4.57) a (4.53) do (4.44) získáme

$$\begin{bmatrix} \delta \varphi, & \delta \psi, & \delta y \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} M_h - I_2 \ddot{\varphi} \\ -M_z - I_5 \ddot{\psi} - kr_5(r_5 \psi - y) \\ k(r_5 \psi - y) - m_4 \ddot{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -r_2 \cos \varphi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda \right\} = 0. \quad (4.58)$$

Postupným vynulováním členů stojících u $\delta \varphi, \delta \psi, \delta y$ dostaneme tři rovnice

$$\begin{aligned} M_h - I_2 \ddot{\varphi} + \lambda r_2 \cos \varphi &= 0, \\ -M_z - I_5 \ddot{\psi} - kr_5(r_5 \psi - y) &= 0, \\ k(r_5 \psi - y) - m_4 \ddot{y} - \lambda &= 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

K těmto třem rovnicím připojíme rovnici (4.48) a dostaneme

$$\begin{bmatrix} -r_2 \cos \varphi, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_2 \dot{\varphi} \sin \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{y} \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

Tyto tři rovnice napíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} I_2, & 0, & 0, & -r_2 \cos \varphi \\ 0, & I_5, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & m_4, & 1 \\ -r_2 \cos \varphi, & 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{y} \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_h \\ -M_z - kr_5(r_5 \psi - y) \\ k(r_5 \psi - y) \\ -r_2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

O správnosti rovnice se přesvědčíme níže při aplikaci Lagrangeových rovnic smíšeného typu.

4.3. Hamiltonův princip

Odvození Hamiltonova principu si ukážeme na soustavě hmotných bodů. Vyjdeme z principu virtuálních prací ve tvaru (4.41), kde jsou obsaženy jen síly konající práci

$$\delta \mathbf{x}^T (\mathbf{F}_a + \mathbf{D}) = 0. \quad (4.62)$$

Nyní pro každou sílu vynecháme index bodu. Dolním indexem budeme značit číslo hmotného bodu, takže virtuální práci všech sil připsaných na soustavu hmotných bodů můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
\sum_i \delta \mathbf{x}_i^T (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{x}}_i) &= \underbrace{\sum_i \delta \mathbf{x}_i^T \mathbf{F}_i}_{\delta W} - \sum_i \delta \mathbf{x}_i^T m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \delta W - \sum_i m_i \left[\frac{d}{dt} (\delta \mathbf{x}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i) - \delta \mathbf{x}_i^T \ddot{\mathbf{x}}_i \right] = \\
&= \delta W - \sum_i m_i \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{x}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i) + \underbrace{\delta \left\{ \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i \right\}}_{E_k} = 0,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

kde symbolem \mathbf{x}_i je označen radiusvektor, zatímco $\delta \mathbf{x}_i$ je jeho virtuální změna. O platnosti posledního výrazu v (4.63) se přesvědčíme tak, že postupujeme opačně, tj. diferencujeme jej

$$\delta \left\{ \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i \right\} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\delta \dot{\mathbf{x}}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i + \dot{\mathbf{x}}_i^T \delta \dot{\mathbf{x}}_i) = \sum_i m_i \delta \dot{\mathbf{x}}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i. \tag{4.64}$$

Připomeňme, že oba členy v závorce jsou skalární veličiny, takže se jejich hodnota transpozicí nemění. Rovnici (4.63) pak přepíšeme do tvaru

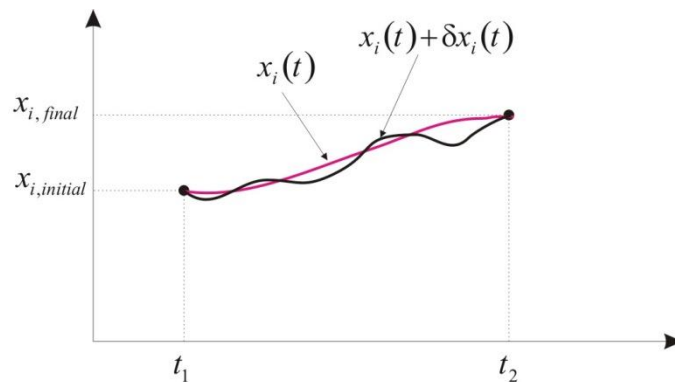
$$\delta W + \delta E_k = \sum_i m_i \frac{d}{dt} (\delta \dot{\mathbf{x}}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i). \tag{4.65}$$

Tuto rovnici integrujme od t_1 do t_2 a dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (E_k + W)|_{\mathbf{x}(t)} dt = \sum_i m_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\delta \dot{\mathbf{x}}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i) dt. \tag{4.66}$$

Hamilton v princip:

Zvolíme-li dva pevné body trajektorie $x_{i,initial}$ a $x_{i,final}$ v pevných časech t_1 a t_2 obr. 4.9, pak tzv. akce nabývá extrému při skutečném pohybu.



Obr. 4.9

Akcí je míněn integrál (Hamiltonův funkcionál)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (E_k + W)|_{\mathbf{x}(t)} dt \rightarrow \text{extrém}. \tag{4.67}$$

Toto tvrzení snadno dokážeme, když vyjádříme integrál na pravé straně (4.66), jehož hodnota je nulová.

$$\sum_i m_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\delta \dot{\mathbf{x}}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i) dt = \sum_i m_i [\delta \dot{\mathbf{x}}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i]_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{4.68}$$

protože hodnoty variací $\delta \mathbf{x}_i^T$ jsou v krajních bodech nulové. Z toho plyne, že levá strana (4.66) je také nulová, tzn., že

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (E_k + W)|_{\mathbf{x}(t)} dt = 0. \quad (4.69)$$

Je-li variace akce nulová, nabývá akce extrému, v našem případě minima (nebudeme dokazovat). Z toho plyne, že skutečná trajektorie bodu v závislosti na t bude minimalizovat integrál (4.67).

Samotný Hamilton v princip nemá velký praktický význam, ale poslouží nám k odvození Lagrangeových rovnic.

4.4 Lagrangeovy rovnice II. druhu

Pepíšme zkrácen

$$\delta W = \sum_i \delta \mathbf{x}_i^T \mathbf{F}_i = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f}_e = \delta^* W, \quad (4.70)$$

$$\text{kde } \delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_1 \\ \delta \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{x}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_m \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Hvzdíka zná skutečnost, že variace se vztahuje jen na trajektorii a ne na sílu. Pak můžeme psát (4.69) s ohledem na (4.70) do tvaru

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \delta E_k dt}_I + \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f}_e dt = 0, \quad (4.72)$$

Integrál I upravíme (následná variace je izochronní, tzn. při konstantním t)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} E_k(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \mathbf{x}^T \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{x}} + \delta \dot{\mathbf{x}}^T \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \mathbf{x}^T \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \right] dt + \underbrace{\left[\delta \mathbf{x}^T \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right]_{t_1}^{t_2}}_0. \quad (4.73)$$

Při integraci jsme použili metodu per-partes. Dosadíme-li (4.73) do (4.69) dostaneme

$$\delta \mathbf{x}^T \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) + \mathbf{f}_e \right] dt = 0. \quad (4.74)$$

Poslední vztah vyjadřuje skalární součin vektoru, který tvoří sumu součinů nezávislých veličin (jednotlivé komponenty vektoru $\delta \mathbf{x}$), takže každý z těchto součinů musí být roven nule. Z toho plyne, že hranatá závorka ve vztahu (4.74) musí být nulová

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{f}_e, \quad (4.75)$$

což je soustava Lagrangeových rovnic II. druhu zapsaných v maticovém tvaru. Jednotlivé rovnice se mohou zapsat ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = F_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.76)$$

kde n je počet volnosti. Na pravé straně figurují zobecněné vnější síly, zatímco setrvačné síly jsou zastoupeny v kinetické energii.

4.5 Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

Pro sestavování pohybových rovnic soustav, které jsou popsány $m > n$ zobecněnými souadnicemi (n je počet volnosti), jsou vhodné Lagrangeovy rovnice smíšeného typu zejména v situaci, kdy nadbytečné souadnice nelze vyjádřit explicitně pomocí řídicích souadnic. V takovém případě k m rovnicím popisujícím podmínky dynamické rovnováhy přistupuje ještě $r = m - n$ vazebních podmínek

$$f_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (4.77)$$

což můžeme maticově vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^r. \quad (4.78)$$

Jedná se o úlohu hledání vázaného extrému. Do Hamiltonova funkcionálu pak přibude ještě vazební podmínka (4.78) násobená příslušným vektorem Lagrangeových multiplikátorů

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [E_k + W + \mathbf{f}^T(\mathbf{x})]_{\mathbf{x}(t)} dt \rightarrow \text{extrém}. \quad (4.79)$$

Pro výpočet variace funkcionálu diferencujeme rovnici (4.79)

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (E_k + W + \delta \mathbf{f}^T(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}(t)} dt = 0, \quad (4.80)$$

kde

$$\delta \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.81)$$

Tento výraz je vazební podmínkou v diferenciální formě, která je reprezentována Pfaffovou formou (4.42). Srovnáním (4.81) a (4.42) dospějeme k závěru, že matice Pfaffovy formy má tvar

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \in \mathbf{R}^{r,m}. \quad (4.82)$$

Variace kinetické energie a práce vyjádřená vztahem (4.74) po dosazení do (4.80) přinese rovnici

$$\delta \mathbf{x}^T \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) + \mathbf{f}_e + \frac{\partial \mathbf{f}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] dt = 0. \quad (4.83)$$

Integrál (4.83) bude nulový tehdy, bude-li nulový integrand

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{f}_e + \frac{\partial \mathbf{f}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad (4.84)$$

což můžeme ještě s ohledem na (4.82) přepsat do tvaru

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{f}_e + \mathbf{A}(\mathbf{x})} \quad (4.84a)$$

Po jednotlivých rovnicích je třeba napsat ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} = F_i + \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \lambda_j, \quad i = 1, 2, \dots, m = n + r. \quad (4.84b)$$

Rovnice (4.84) představuje $m = n + r$ algebro-diferenciálních rovnic pro neznámé $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^{m,1}$ a vektor Lagrangeových multiplikátorů $\lambda \in \mathbf{R}^{r,1}$. K soustavě (4.84) je třeba připojit vazební podmínku (4.78)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^r. \quad (4.85)$$

Obě rovnice (4.84) a (4.85) tvoří soustavu $m + r = n + 2r$ algebro-diferenciálních rovnic pro $m + r$ neznámých $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^{m,1}$ a $\lambda \in \mathbf{R}^{r,1}$. Z praktických důvodů (jak se ukáže) je vhodné rovnici (4.85) dvakrát derivovat

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad (4.86)$$

$$\boxed{\ddot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{A}}^T(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{A}}^T(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.} \quad (4.87)$$

Nyní je třeba upravit výrazy na levé straně (4.84). Derivace kinetické energie $E_k = E_k(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ je možná vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_m} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E_k}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial E_k}{\partial x_m} \end{bmatrix}, \quad (4.88)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}^T} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}}, \quad (4.89)$$

kde

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_m \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_m \partial x_m} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m,m}, \quad (4.90)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}^T} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_1}, & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2}, & \dots, & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_m} \\ \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1}, & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_2}, & \dots, & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_m \partial \dot{x}_1}, & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_m \partial \dot{x}_2}, & \dots, & \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{x}_m \partial \dot{x}_m} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m,m}. \quad (4.91)$$

Nyní ob rovnice (4.84a) a (4.87) p e pí-eme do tvaru

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_e - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \dot{\mathbf{x}}, \quad (4.92)$$

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} = -\dot{\mathbf{A}}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}. \quad (4.93)$$

Nyní ozna me

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{f}_e - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -\dot{\mathbf{A}}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \quad (4.94)$$

a m fleme ob rovnice (4.92) a (4.93) p epsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}, & \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A}^T(\mathbf{x}), & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}, \quad (4.95)$$

cofi je rovnice shodná s rovnicí (4.52), kterou jsme získali aplikací principu virtuálních prací.

4.6 Aplikace na Lagrangeovy rovnice II. druhu a smí-eného typu

Abychom ukázali souvislost mezi principem virtuálních prací a Lagrangeovými rovnicemi II. druhu a smí-eného typu, e-me p íklady 4.1 4.2 a 4.3 pomocí Lagrangeových rovnic.

P íklad 4.4

Na obr. 4.7 je znázorn n mechanismus s harmonickou va kou. Sestavme pohybovou rovnici pomocí Lagrangeových rovnic II. druhu za pomocí popisu ídicími zobecn ými sou adnicemi. Mechanismus má 1° volnosti a za ídicí zobecn nou sou adnici si vybereme úhel nato ení va ky . V takovém p ípad je t eba explicitn vyjád it sou adnice z a y, jejich derivace a variace (diferenciální p ír stky) pomocí úhlu a jeho variace

$$\begin{aligned} y &= e \sin \varphi + r \Rightarrow \delta y = e \cos \varphi \delta \varphi, & \dot{y} &= e \dot{\varphi} \cos \varphi \\ z &= e \sin \varphi \Rightarrow \delta z = e \cos \varphi \delta \varphi, & \dot{z} &= e \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Kinetickou energii vyjád íme ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{y}^2 = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_3 e^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi. \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = I_A \dot{\varphi} + m_3 e^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I_A \ddot{\varphi} + m_3 e^2 \ddot{\varphi} \cos^2 \varphi - 2 m_3 e^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad (4.98)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = -m_3 e^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (4.99)$$

Zobecn nou sílu ur íme stejným zp sobem jako p i aplikaci principu virtuálních prací tak, fle srovnáme virtuální práci v-ech silových ú ink p sobících na soustavu (krom setrva ných) s virtuální prací zobecn né síly. S ohledem na (4.76) p í-eme

$$F_{\varphi} \delta\varphi = M \delta\varphi - (F + m_3 g) \delta y - m_2 g \delta z, \quad (4.100)$$

a s ohledem na (4.96) dostaneme

$$F_{\varphi} \delta\varphi = M \delta\varphi - (F + m_3 g) e \cos \varphi \delta\varphi - m_2 g e \cos \varphi \delta\varphi, \quad (4.101)$$

z ehofl plyne

$$F_{\varphi} = M - (F + m_3 g) e \cos \varphi - m_2 g e \cos \varphi. \quad (4.102)$$

Po dosazení (4.98), (4.99) a (4.102) do (4.76) ($n = 1$) dostaneme

$$\boxed{M - I_A \ddot{\varphi} - [F + m_3 g + m_3 e \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_3 e \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + m_2 g] e \cos \varphi = 0,} \quad (4.103)$$

cofl je rovnice identická s (4.24).

P íklad 4.5

Na obr. 4.8 je znázorn na soustava s dv ma ° volnosti. Na-ím úkolem nech je sestavit pohybové rovnice pomocí Lagrangeových rovnic II. druhu za pomocí popisu ídicími zobecn ými sou adnicemi, za které volíme nap . φ a ψ . Poloha soustavy na obr. 4.8 je popsána t emi sou adnicemi φ , ψ a y , z nichfl y explicitn vyjád íme pomocí φ ve tvaru

$$y = r_2 \sin \varphi \Rightarrow \delta y = r_2 \cos \varphi \delta\varphi, \quad \dot{y} = r_2 \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (4.104)$$

Kinetickou energii vyjád íme ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_5 \dot{\psi}^2. \quad (4.105)$$

Po vyjád ení kinetické energie pomocí ídicích zobecn ých sou adnic m fleme s ohledem na (4.104) psát

$$E_k = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_4 r_2^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} I_5 \dot{\psi}^2. \quad (4.106)$$

Derivace pot ebné pro dosazení do (4.76) mají tvar

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = I_2 \dot{\varphi} + m_4 r_2^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I_2 \ddot{\varphi} + m_4 r_2^2 \ddot{\varphi} \cos^2 \varphi - 2 m_4 r_2^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = -m_4 r_2^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (4.108)$$

Nyní ud líme soustav virtuální posunutí $\delta\varphi \neq 0$, $\delta\psi = 0$. Zobecn nou sílu F_{φ} získáme srovnáním virtuální práce zobecn né síly a silových ú ink p sobící na soustavu (krom setrva ných ú ink) p i daném virtuálním posunutí

$$F_{\varphi} \delta\varphi = M_h \delta\varphi + k(r_5 \psi - y) \delta y. \quad (4.109)$$

Po dosazení (4.104) do (4.109) dostaneme

$$F_\varphi \delta\varphi = M_h \delta\varphi + k(r_5\psi - r_2 \sin \varphi)r_2 \cos \varphi \delta\varphi \quad (4.110)$$

a po vykrácení $\delta\varphi$ dostaneme

$$F_\varphi = M_h + k(r_5\psi - r_2 \sin \varphi)r_2 \cos \varphi. \quad (4.111)$$

Dosadíme-li (4.107), (4.108) a (4.111) do (4.76) dostaneme první pohybovou rovnici

$$\boxed{I_2\ddot{\varphi} + m_4r_2^2\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - m_4r_2^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi = M_h + k(r_5\psi - r_2 \sin \varphi)r_2 \cos \varphi,} \quad (4.112)$$

což je rovnice identická s (4.28). Podobným způsobem postupujeme i v případě druhé rovnice zobecněné souadnice.

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}} = I_5\dot{\psi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}}\right) = I_5\ddot{\psi}, \quad (4.113)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \psi} = 0. \quad (4.114)$$

Udělíme soustavě virtuální posunutí $\delta\varphi = 0$, $\delta\psi \neq 0$ a srovnáme virtuální práci zobecněné síly F_ψ s virtuální prací silových úhlníků p i daném virtuálním posunutí

$$F_\psi \delta\psi = -M_z \delta\psi - k(r_5\psi - r_2 \sin \varphi)r_5 \delta\psi. \quad (4.115)$$

Po vykrácení $\delta\psi$ dostaneme

$$F_\psi = -M_z - k(r_5\psi - r_2 \sin \varphi)r_5. \quad (4.116)$$

Dosadíme-li (4.113), (4.114) a (4.116) do (4.76) dojdeme k druhé pohybové rovnici ve tvaru

$$\boxed{I_5\ddot{\psi} = -M_z - k(r_5\psi - r_2 \sin \varphi)r_5,} \quad (4.117)$$

což je rovnice identická s (4.30), ke které jsme dospěli aplikací principu virtuálních prací.

Příklad 4.6

Jako poslední si uvedeme příklad obdobný příkladu 4.3 (obr. 4.8) na sestavení pohybové rovnice soustavy, jejíž poloha je popsána zobecněnými souadnicemi $m=3$, (φ, ψ, y) . Vektor zobecněných souadnic a jeho virtuálních přírůstků bude podobný jako v příkladu 4.3 mít tvar

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ y \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta\psi \\ \delta y \end{bmatrix}. \quad (4.118)$$

Protože soustava má $n=2$ volnosti, je třeba přidat $r=m-n=1$ vazební podmínku

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = y - r_2 \sin \varphi = 0. \quad (4.119)$$

Kinetickou energii vyjádříme pomocí uvedených zobecněných souadnic ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_4\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_5\dot{\psi}^2. \quad (4.120)$$

P íslu-né derivace mají tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I_2 \ddot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}} \right) = I_5 \ddot{\psi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} \right) = m_4 \ddot{y}, \quad (4.121)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = \frac{\partial E_k}{\partial \psi} = \frac{\partial E_k}{\partial y} = 0. \quad (4.122)$$

Nyní ud líme postupn ě nenulová virtuální posunutí: Pro $\delta\varphi \neq 0$, $\delta\psi = 0$, $\delta y = 0$ dostaneme ze srovnání virtuálních prací

$$F_\varphi \delta\varphi = M_h \delta\varphi \Rightarrow F_\varphi = M_h, \quad (4.123)$$

pro $\delta\varphi = 0$, $\delta\psi \neq 0$, $\delta y = 0$ dostaneme

$$F_\psi \delta\psi = -M_z \delta\psi - k(r_5\psi - y)r_5 \delta\psi \Rightarrow F_\psi = -M_z - k r_5 (r_5\psi - y) \quad (4.124)$$

a pro $\delta\varphi = 0$, $\delta\psi = 0$, $\delta y \neq 0$ bude p íslu-ná virtuální práce a zobecn ěná síla mít tvar

$$F_y \delta y = k(r_5\psi - y) \delta y \Rightarrow F_y = k(r_5\psi - y). \quad (4.125)$$

Dále vyjád ěme derivace omezení (4.119) podle zobecn ěných sou adnic

$$\frac{\partial^T \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 \sin \varphi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (4.126)$$

Nyní jiř m ěleme sestavit první tři algebro-diferenciální rovnice pro neznámé φ , ψ , y a λ dosazením (4.126), (4.121-4.125) do (4.84b)

$$\begin{aligned} I_2 \ddot{\varphi} &= M_h - \lambda r_2 \cos \varphi, \\ I_5 \ddot{\psi} &= -M_z - k(r_5\psi - y)r_5, \\ m_4 \ddot{y} &= k(r_5\psi - y) + \lambda. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Tyto rovnice mohou být zapsány v maticové form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{A}, \quad (4.127)$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_2 & & \\ & I_5 & \\ & & m_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e(t) = \begin{bmatrix} M_h \\ -M_z - k(r_5\psi - y)r_5 \\ k(r_5\psi - y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -r_2 \sin \varphi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad = \lambda. \quad (4.128)$$

K rovnici (4.127) je-t ě musíme p ídat dvakrát derivovaný vektor omezení (4.119) (v na- ěm p ípad ě jen jeden prvek)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = y - r_2 \sin \varphi = 0, \quad (4.129)$$

$$\dot{f}(\mathbf{x}) = \dot{y} - r_2 \dot{\varphi} \cos \varphi = 0, \quad (4.130)$$

$$\ddot{f}(\mathbf{x}) = \ddot{y} - r_2 \ddot{\varphi} \cos \varphi + r_2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}}(t) = 0. \quad (4.131)$$

Po p ipojení (4.131) ve skalárním tvaru k rovnicím (4.126) m flème celkovou soustavu algebro-diferenciálních rovnic zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} I_2, & 0, & 0, & -r_2 \cos \varphi \\ 0, & I_5, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & m_4, & 1 \\ -r_2 \cos \varphi, & 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{y} \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_h \\ -kr_5(r_5\psi - y) \\ k(r_5\psi - y) \\ -r_2\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (4.132)$$

která je identická se soustavou (4.61) získanou pomocí principu virtuálních prací. Podobn v maticovém tvaru m flème p ipojit maticový tvar (4.131) k rovnici (4.127) a dostaneme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}, & \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A}^T(\mathbf{x}), & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e(t) \\ -\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}, \quad (4.133)$$

cofl je rovnice identická s (4.52), kde vektor nelineárních zobecn ných setrva ných sil $\mathbf{f}_D(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ a vektor nelineárních elastických a viskozních sil $\mathbf{f}_N(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$ jsou nulové.

5. Kmitání lineárních diskrétních soustav

V této kapitole se omezíme na slabě tlumené lineární dynamické kmitavé systémy diskrétní, tzn. s konečným potem stupně volnosti a s tzv. komutativní maticí tlumení (bude níže specifikováno). Tyto systémy jsou popsány obecnou soustavou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu. Navíc se omezíme na systémy s konstantními symetrickými koeficientovými maticemi. Pro zájemce o problematiku kmitání obecnějších systémů (kontinua, diskrétní systémy s obecnými koeficientovými maticemi, stochastické systémy apod.) odkazujeme na literaturu [5]. Dále předpokládáme symetrii koeficientových matic hmotnosti tlumení a tuhosti a stabilitu vyšetřovaných systémů. Existuje celá řada definic stability kmitavých systémů. My se zde omezíme na slovní vyjádření, které jako stabilní označuje systém, jehož zobecněné výchylky bez vlivu vnějšího působení zstanou omezené. Podle této definice sem spadají i systémy netlumené, které nevykazují disipaci (pohlcování) energie a jejich zobecněné výchylky vase neutuchají. V případě, že se sase limitně tyto zobecněné výchylky blíží k rovnovážné poloze bez působení vnějších úinků (systémy vykazující tlumení), označujeme tyto systémy jako asymptoticky stabilní. V celé této kapitole budeme řešit tzv. počáteční úlohy, které mají vřdu řešení.

Poznámka:

Počáteční úlohou řešení diferenciální rovnice r -tého řádu (nejvyšší derivace podle času) je myšlen problém řešení této diferenciální rovnice (nebo soustavy rovnic) s tím, že jsou zadány $0, 1, \dots, r-1$ -té derivace vektoru neznámých v jednom časovém okamžiku $t = t_0$ a nejast ji budeme volit $t_0 = 0$.

5.1 Pohybová rovnice

Pomocí např. metod analytické mechaniky uvedených ve 4. kapitole sestavíme pohybovou rovnici, která v případě lineárních diskrétních systémů dostává tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (5.1)$$

kde $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$. Matice $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}$ bývají zpravidla označovány postupně jako matice hmotnosti, tlumení a tuhosti. Symboly $\mathbf{f}(t)$ a $\mathbf{q}(t)$ představují vektory zobecněných sil a výchylek. Zobecněnými výchylkami mohou být i úhly natočení a pak odpovídající zobecněná síla má význam momentu. Aby rovnice (5.1) byla jednoznačně řešitelná, je třeba zadání doplnit počátečními podmínkami ve smyslu poslední poznámky

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(0) \in \mathbb{R}^n. \quad (5.2)$$

Řešení, které si zde uvedeme, bude využívat rozkladu do vlastních tvarů kmitání, pomocí tzv. modálních metody. Východiskem řešení pomocí modálních metody je určení tzv. vlastních tvarů kmitu (vlastních vektorů, módů) a vlastních čísel (obma množením říkáme modální a spektrální veličiny), které pro úlohy popsané v této kapitole tvoří kvadráty vlastních frekvencí uvedených v jednotkách $[\text{rad}/\text{s}]$. Pro získání zmíněných veličin je třeba provést modální analýzu.

5.2 Modální analýza

U lineárních systémů nejsou modální veličiny ovlivněny vstupní veličinou (buzením) a v případě slabě tlumených systémů ani tlumením. Stačí si uvědomit, jaký je vztah mezi vlastními frekvencí tlumeného a netlumeného systému [2]

$$\Omega_D = \Omega \sqrt{1 - D^2}, \quad (5.3)$$

kde Ω_D , Ω , D jsou postupně vlastní frekvence tlumeného systému, vlastní frekvence netlumeného systému a poměrný útlum. Předpokládáme-li, že poměrný útlum strojních konstrukcí bývá $D \in \langle 0.01 \div 0.05 \rangle$ je rozdíl mezi vlastními frekvencí netlumeného a tlumeného systému $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_D \in \langle 5e-5 \div 1.25e-3 \rangle \Omega$. S ohledem na tuto skutečnost můžeme modální analýzu provést na netlumeném a nebuzeném systému, jehož pohyb je popsán rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

Jak ukázala praxe, výchylky netlumených systémů jsou při kmitání jednotlivými tvary kmitu (bude vysvětleno níže) vždy ve fázi nebo v protifázi a nejsou vzájemně posunuty. Proto při řešení (5.4) vystoupíme s reálnou aritmetikou a předpokládáme řešení ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v} \sin \Omega t, \quad (5.5)$$

kde kmitání ve fázi nebo protifázi vyjádří znaménko příslušného prvku vektoru amplitud \mathbf{v} . Po dosazení předpokládaného řešení do (5.4) a vykrácení časovou funkcí $\sin \Omega t$ dostaneme

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (5.6)$$

Rovnice (5.6) představuje problém vlastních čísel. Zde budeme předpokládat, že pro každé např. i -té vlastní číslo bude nulita (defekt) matice $\mathbf{K} - \Omega_i^2 \mathbf{M}$ (rozdíl mezi řádem matic \mathbf{M} , \mathbf{K} a hodnotami matice $\mathbf{K} - \Omega_i^2 \mathbf{M}$) rovna násobnosti i -tého vlastního čísla. Pak je systém jednoduché struktury (i když obsahuje násobná vlastní čísla). Tento předpoklad bývá v drtivé většině případů splněn a pro nenulové vlastní číslo můžeme nastat s pravděpodobností nula (např. v prostoru dvou parametrů systému by hodnoty těchto parametrů musely padnout na konkrétní ležící v této rovině). Z tohoto důvodu je předpoklad oprávněný. Údava metod numerického řešení problému vlastních čísel je uvedena např. v [5]. Formálně můžeme řešení (5.6) popsat takto. Na jedné straně existuje triviální (nulové) řešení vektoru \mathbf{v} . Pro nás je však důležitější netriviální řešení, které pro homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic existuje jen tehdy, když je determinant matice koeficientů nulový, tj.

$$\det(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (5.7)$$

Řešením této (frekvenční, charakteristické, sekulární) rovnice je n reálných kořenů Ω_i^2 , $i = 1, 2, \dots, n$. (z lineární algebry víme, že vlastní čísla zobecněného problému vlastních čísel $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{x}$ jsou v případě symetrických matic \mathbf{A} a \mathbf{B} reálná). U kmitavých systémů představuje symbol Ω_i tzv. vlastní frekvence [rad/s], což jsou frekvence, kterými je schopen lineární systém kmitat bez vnějších vlivů (volné kmitání). O tom, jakou vlastními frekvencí nebo frekvencemi systém volně kmitá, rozhoduje jeho poáteční konfigurace. V případě

násobných koen každý koen po íáme tolikrát, kolik je jeho násobnost. V praxi se rovnice (5.7) nikdy neeí jako transcendentní rovnice (polynom n -tého stupn pro Ω^2), ale b fnými metodami pro eení zobecn ného problému vlastních ísel matic $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{Bx}$, které jsou uvedeny nap . v [5]. eení (5.7) jako transcendentní rovnice by nebylo mofné nejen z asových d vod , ale i z dvodu p ete ení pam ti pro soustavy velkých ád , jaké vzniknou zejména p i poufítí MKP. Po dosazení vlastních ísel Ω_i^2 , $i = 1, 2, \dots, n$, do rovnice (5.6)

$$(\mathbf{K} - \Omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

a jejím eením získáme n vlastních vektor \mathbf{v}_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Protože uvaflujeme jen systémy jednoduché struktury, odpovídá každému vlastnímu íslu jeden vlastní vektor, to znamená, že nap . vlastnímu íslu Ω_i^2 , které je n_i -násobné, odpovídá n_i vlastních vektor . Vlastní vektory odpovídající jednoduchým vlastním ísl m Ω_j^2 jsou ur eny jednozna n afl na násobnou konstantu - matice koeficient v (5.8) má hodnotu $n - 1 \Rightarrow \text{defekt} = 1$. To se uskute ní nap . tak, že první prvek vektoru \mathbf{v}_j zvolíme a ostatní prvky vektoru dopo íáme. V p ípad n_i -násobného ísla Ω_i^2 volíme pro každý vlastní vektor (celkem n_i) odpovídající tomuto vlastnímu íslu n_i prvk tak, aby v-echny n_i -tice byly nezávislé a ostatní prvky vfdy dopo íáme.

Ortogonalita vlastních vektor

Napi-me rovnici (5.8) pro i a j -té vlastní íslo, první resp. druhou násobme \mathbf{v}_j^T resp. \mathbf{v}_i^T zleva a druhou transponujeme. Pak dostaneme

$$\mathbf{v}_j^T (\mathbf{K} - \Omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_i = 0, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{v}_j^T (\mathbf{K} - \Omega_j^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_i = 0. \quad (5.10)$$

Kdyfl tyto rovnice od sebe ode tme, dostaneme

$$(\Omega_i^2 - \Omega_j^2) \mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = 0. \quad (5.11)$$

Z posledního vztahu plyne

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } \Omega_i \neq \Omega_j \\ ? & \Omega_i = \Omega_j \end{cases}. \quad (5.12)$$

Ze vztahu (5.11) a (5.12) m fme soudit, že vlastní vektory jsou ortogonální pro r zná vlastní ísla. Pro násobná vlastní ísla obecn nemusí být vlastní vektory ortogonální, proto je vhodné je ortogonalizovat. Z d vod , které vyplynou pozd ji, bychom cht li, aby platilo

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = \delta_{ij}, \quad (5.13)$$

kde δ_{ij} je Kronecker v symbol. Sestavíme-li vlastní vektory spl ující (5.13) do jisté matice tak, aby tyto vektory tvo ily její sloupce, m fme psát

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \in \mathbf{R}^{n,n}. \quad (5.14)$$

Matice \mathbf{V} se nazývá modální matice a splňuje podmínku

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad (5.15)$$

kde $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{n,n}$ je jednotková matice. Vztahy (5.13) a (5.14) vyjadřují nejen ortogonalitu, ale i podmínku normy $\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Proto je třeba provést ortonormalizaci. Pro tuto chvíli označme neortogonalizované a nenormované vlastní vektory sestavené do modální matice tildou, tzn.

$$\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_n] \in \mathbf{R}^{n,n}. \quad (5.16)$$

Provedeme-li s maticí $\tilde{\mathbf{V}}$ podobnou operaci jako v (5.15), dostaneme

$$\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{Q}, \quad (5.17)$$

kde matice $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n,n}$ je téměř diagonální, jen na diagonále v místech prvků vzniklých součinem sloupce matice $\tilde{\mathbf{V}}$, odpovídajících násobným vlastním číslům Ω_i^2 , se mohou objevit nenulová pole. Ortonormalizaci provedeme tak, že matici \mathbf{Q} rozložíme Choleského rozkladem

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}^T \mathbf{L} \quad (5.18)$$

na dvě trojúhelníkové matice. K tomu je třeba, aby matice \mathbf{Q} byla symetrická a pozitivně definitní. To je splněno v případě, že matice hmotnosti \mathbf{M} je symetrická a pozitivně definitní, tzn. také rozložitelná Choleského rozkladem $\mathbf{M} = \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1$. Dá se dokázat, že matice hmotnosti \mathbf{M} je vždy pozitivně definitní, neobsahuje-li soustava nehmotné stupně volnosti. Velmi snadno se o tom přesvědčíme, vyjádříme-li kinetickou energii ve tvaru kvadratické formy vektoru zobecněných rychlostí (následující tvar platí pro soustavy neobsahující rotující členy)

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}.$$

Tento výraz je vždy kladný, platí-li $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$, protože kinetická energie nemůže mít zápornou hodnotu. Z toho plyne pozitivní definitnost matice hmotnosti. Poslední výraz nemusí platit zejména pro soustavy obsahující rotující části. Pak se ve výrazu pro kinetickou energii objeví člen obsahující matici gyroskopických úhybníků. Pak můžeme (5.17) přepsat do tvaru

$$\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1 \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{Q}. \quad (5.19)$$

Ze vztahu (5.19) je zřejmé, že pro libovolný vektor \mathbf{x} bude platit $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} > 0$, protože podle (5.19) platí $\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1 \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} > 0$, kde jsme označili $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{L}_1 \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{x}$. Označíme-li $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \tilde{\mathbf{V}}$, dostaneme ze vztahu (5.19) vztah (5.18). Dosadíme-li (5.18) do (5.17) a vynásobíme-li celou rovnici zleva \mathbf{L}^{-T} a zprava \mathbf{L}^{-1} , dostaneme

$$\mathbf{L}^{-T} \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (5.20)$$

Srovnáme-li vztahy (5.20) a (5.15) je zřejmé, že ortonormalizovaná modální matice má tvar

$$\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{L}^{-1}. \quad (5.21)$$

Tento způsob ortogonalizace se nazývá Schmidt v ortogonalizační proces. Pro modální matici vypočítanou podle (5.21) již platí požadavek (5.13) a jeho kompaktní tvar (5.15). Pro jednoduchá vlastní čísla ($\Omega_i \neq \Omega_j$ pro $i \neq j$) vyjde matice \mathbf{Q} diagonální

$$\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{Q} = \text{diag} \{ \tilde{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{v}}_i \}, \quad (5.22)$$

a normalizační matice má tvar

$$\mathbf{L}^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{v}}_i}} \right\}. \quad (5.23)$$

To znamená, že jednotlivé vektory normujeme podle vztahu

$$\mathbf{v}_i = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_i}{\sqrt{\tilde{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{v}}_i}}. \quad (5.24)$$

Pepíšme (5.8) s ohledem na (5.13)

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{K} \mathbf{v}_i = \Omega_i^2 \underbrace{\mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i}_{\delta_{ij}} = \Omega_i^2 \delta_{ij}, \quad (5.25)$$

což můžeme zapsat v kompaktním tvaru

$$\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Omega}^2, \quad (5.26)$$

kde $\mathbf{\Omega}^2 = \text{diag} \{ \Omega_i^2 \}$ je tzv. spektrální matice. Výsledkem modální analýzy diskretních matematických modelů se slabým tlumením a se symetrickými maticemi \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} jsou modální a spektrální matice splňující podmínky

$$\boxed{\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Omega}^2}. \quad (5.27)$$

Vztahy (5.27) mohou být také napsány obráceně tak, že ze znalosti modální a spektrální matice určíme matici hmotnosti a tuhosti vynásobením obou rovnic zleva \mathbf{V}^{-T} a zprava \mathbf{V}^{-1} . Tento vztah můžeme seřadit konstrukcí vzorce a mají tvar

$$\mathbf{M} = \mathbf{V}^{-T} \mathbf{V}^{-1} = (\mathbf{V} \mathbf{V}^T)^{-1}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{V}^{-T} \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{V}^{-1}. \quad (5.28)$$

5.3 Volné kmitání slabě tlumených systémů s komutativní maticí tlumení

V této podkapitole se omezíme jen na matematické modely s tzv. komutativní maticí tlumení. Komutativní matice tlumení je taková matice, která splňuje podmínku

$$\mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V} = \text{diag}\{2D_i \Omega_i\}, \quad (5.29)$$

to znamená, že je diagonalizovatelná pomocí modální matice, jako matice \mathbf{M} a \mathbf{K} . Z požadavku, aby matice byla diagonální, plyne skutečnost, že komutuje s jakoukoliv diagonální maticí, např. \mathbf{D} . Rovnost

$$= \quad (5.30)$$

můžeme pomocí vztahů (5.27) a (5.29) do tvaru

$$\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}. \quad (5.31)$$

Jestliže první vztah (5.27) ($\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{I}$) invertujeme, dostaneme

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (5.32)$$

Tuto matici nyní vložíme do naznačených mezer ve vztahu (5.31) a získáme podmínku komutativity matice tlumení ve tvaru

$$\boxed{\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}}. \quad (5.33)$$

Zvláštní případ komutativní matice tlumení je tzv. matice proporcionálního tlumení, kdy je matice tlumení lineární kombinací matice hmotnosti a matice tuhosti, tzn.

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}. \quad (5.34)$$

O diagonalizovatelnosti matice \mathbf{B} se snadno přesvědčíme, když dosadíme (5.34) do (5.29) a dojdeme ke vztahu

$$\mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}) \mathbf{V} = \alpha \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} + \beta \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{D}. \quad (5.35)$$

Výsledkem je součet dvou diagonálních matic, což je opět diagonální matice. Předpokládáme si pohybovou rovnici popisující volné kmitání soustav s komutativní maticí tlumení, která má tvar (5.1) s nulovou pravou stranou

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (5.36)$$

s nenulovými počátečními podmínkami

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (5.37)$$

Místo vektoru zobecněných souadnic zavedeme vektor modálních souadnic vztahem

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \mathbf{x}(t).$$

Po dosazení posledního vztahu do pohybové rovnice (5.36) a vynásobením celé rovnice zleva maticí \mathbf{V}^T dojdeme ke vztahu

$$\underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}}_{\mathbf{I}} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V}}_{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}}_{\mathbf{K}} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \quad (5.38)$$

což je soustava n nezávislých diferenciálních rovnic z nichž i -tá má tvar

$$\ddot{x}_i(t) + 2D_i \Omega_i \dot{x}_i(t) + \Omega_i^2 x_i(t) = 0 \quad (5.39)$$

a řešení [7]

$$x_i(t) = e^{-D_i \Omega_i t} (\alpha_i \cos \Omega_{Di} t + \beta_i \sin \Omega_{Di} t), \quad (5.40)$$

kde $\Omega_{Di} = \Omega_i \sqrt{1 - D_i^2}$ je i -tá vlastní frekvence tlumeného kmitání. Vztahu (5.40) odpovídá maticový tvar

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{E}(t) [\mathbf{C}(t) + \mathbf{S}(t)], \quad (5.41)$$

$$\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} e^{-D_1 \Omega_1 t} & & & \\ & e^{-D_2 \Omega_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-D_n \Omega_n t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \cos \Omega_{D1} t & & & \\ & \cos \Omega_{D2} t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cos \Omega_{Dn} t \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} \sin \Omega_{D1} t & & & \\ & \sin \Omega_{D2} t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sin \Omega_{Dn} t \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Vrátíme-li se k p ředchozím zobecn ěným sou adnicím, dostaneme

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \mathbf{x}(t) = \mathbf{V} \mathbf{E}(t) [\mathbf{C}(t) + \mathbf{S}(t)]. \quad (5.44)$$

Pro ur ění vektor ě integrací konstant a potřebujeme první derivaci vektoru zobecn ěných výchylek (5.44) podle času, která má tvar

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{E}(t) [\mathbf{C}(t) + \mathbf{S}(t)] + \mathbf{V} \mathbf{E}(t) \mathbf{D} [-\mathbf{S}(t) + \mathbf{C}(t)], \quad (5.45)$$

kde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_n \end{bmatrix}, \quad = \begin{bmatrix} \Omega_1 & & & \\ & \Omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Omega_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \Omega_{D1} & & & \\ & \Omega_{D2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Omega_{Dn} \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

Dosadíme-li do vztah ů (5.44) a (5.45) požadované podmínky (5.37), máme

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_0 = \mathbf{V} \Rightarrow & \mathbf{q}_0 = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{q}_0, \\ \dot{\mathbf{q}}_0 = -\mathbf{V}\mathbf{D} + \mathbf{V}^{-1} \dot{\mathbf{q}}_0 & \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{V}^{-1} \dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{V}\mathbf{D} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{q}_0.\end{aligned}\quad (5.47)$$

Vypočítané vektory integračních konstant dosadíme do rovnice (5.44) a dojdeme ke vztahu

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}\mathbf{E}(t) \left[\mathbf{C}(t) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{q}_0 + \mathbf{S}(t) \mathbf{V}^{-1} \dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{V}\mathbf{D} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{q}_0 \right]. \quad (5.48)$$

Vektor zobecněných rychlostí získáme dosazením (5.47) do (5.45). Inverze diagonální matice \mathbf{D} není potřeba, avšak pro velké rozměry matice je vhodné se inverzi matice \mathbf{V} vyhnout tak, že ortogonalizační vztah (5.15) vynásobíme zprava maticí \mathbf{V}^{-1} a dostaneme

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T \mathbf{M}. \quad (5.49)$$

Ve světle posledního vztahu můžeme napsat (5.48) ve tvaru

$$\boxed{\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}\mathbf{E}(t) \left[\mathbf{C}(t) \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0 + \mathbf{S}(t) \mathbf{V}^T \mathbf{M} (\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{V}\mathbf{D} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0) \right]}. \quad (5.50)$$

Pro netlumené soustavy stačí dosadit do všech členů $D_i = 0$, tzn., že $\mathbf{E}(t) = \mathbf{I}$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, $\mathbf{S}(t) = \text{diag}\{\sin \Omega_i t\}$, $\mathbf{C}(t) = \text{diag}\{\cos \Omega_i t\}$.

5.4 Vynucené kmitání slabě tlumených systémů s komutativní maticí tlumení

Při řešení vynuceného kmitání jmenovaných modelů přivedeme pohybovou rovnici (5.1) do kanonického tvaru v modálních souřadnicích podobným způsobem, jak jsme to učinili v případě volného kmitání, tzn. v rovnici (5.38). Zavedeme substituci $\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}\mathbf{x}(t)$, dosadíme do (5.1) a výslednou rovnici pronásobíme zleva maticí \mathbf{V}^T . Pak dostaneme

$$\underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}}_{\mathbf{I}} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V}}_{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}}_{\mathbf{\Omega}^2} \mathbf{x}(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{f}(t). \quad (5.51)$$

Poslední maticová rovnice představuje opět soustavu n nezávislých diferenciálních rovnic

$$\ddot{x}_i(t) + 2D_i \Omega_i \dot{x}_i(t) + \Omega_i^2 x_i(t) = \mathbf{v}_i^T \mathbf{f}(t). \quad (5.52)$$

Pro zkrácení psaní a pro tento okamžik vynecháme index i , takže máme rovnici

$$\ddot{x}(t) + 2D\Omega \dot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = \mathbf{v}^T \mathbf{f}(t), \quad (5.53)$$

jejíž řešení se skládá z homogenního řešení

$$x^H(t) = e^{-D\Omega t} (\alpha \cos \Omega_D t + \beta \sin \Omega_D t) \quad (5.54)$$

a partikulárního řešení, pro jehož nalezení použijeme fundamentální funkce obsažené v homogenním řešení (5.54). Obě fundamentální funkce označíme symboly

$$y_1(t) = e^{-D\Omega t} \cos \Omega_D t, \quad y_2(t) = e^{-D\Omega t} \sin \Omega_D t. \quad (5.55)$$

Předešlé je třeba poznamenat, že fundamentální funkce (5.55) splňují rovnici (5.53) bez pravé strany. Partikulární řešení rovnice (5.53) budeme hledat ve tvaru lineární kombinace fundamentálních funkcí (5.55) (zkráceně psáno)

$$x^P(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) = c_1y_1 + c_2y_2, \quad (5.56)$$

kde $c_1(t)$ a $c_2(t)$ jsou hledané časové funkce (variované konstanty). Partikulární řešení dosadíme do rovnice s pravou stranou (5.53). Z toho dále vedu dvakrát derivujeme rovnici (5.56) podle času (pí-eme zkrácen)

$$\dot{x}^P(t) = \dot{c}_1y_1 + c_1\dot{y}_1 + \dot{c}_2y_2 + c_2\dot{y}_2, \quad (5.57)$$

a vybereme-li ze všech partikulárních řešení ta, pro která platí

$$\boxed{\dot{c}_1y_1 + \dot{c}_2y_2 = 0}, \quad (5.58)$$

dostaneme první a druhou derivaci partikulárního řešení ve tvaru

$$\dot{x}^P(t) = c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2, \quad (5.59)$$

$$\ddot{x}^P(t) = \dot{c}_1\dot{y}_1 + c_1\ddot{y}_1 + \dot{c}_2\dot{y}_2 + c_2\ddot{y}_2. \quad (5.60)$$

Vztahy (5.56), (5.59) a (5.60) dosadíme do prvé vodní pohybové rovnice respektující fakt, že fundamentální řešení splňuje prídruženou homogenní rovnici (výrazy označené hvězdičkou a dvěma hvězdičkami jsou dohromady rovny nule)

$$\dot{c}_1\dot{y}_1 + \underbrace{c_1\ddot{y}_1}_{*} + \dot{c}_2\dot{y}_2 + \underbrace{c_2\ddot{y}_2}_{**} + 2D\Omega \left(\underbrace{c_1\dot{y}_1}_{*} + \underbrace{c_2\dot{y}_2}_{**} \right) + \Omega^2 \left(\underbrace{c_1y_1}_{*} + \underbrace{c_2y_2}_{**} \right) = \mathbf{v}^T \mathbf{f}(t) \quad (5.61)$$

a dostaneme

$$\boxed{\dot{c}_1\dot{y}_1 + \dot{c}_2\dot{y}_2 = \mathbf{v}^T \mathbf{f}(t)}. \quad (5.62)$$

Ze šzarámovaných rovnic (5.58) a (5.62) dostaneme

$$\dot{c}_1 = \frac{-\mathbf{v}^T \mathbf{f}(t)y_2}{y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1y_2}, \quad \dot{c}_2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{f}(t)y_1}{y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1y_2}. \quad (5.63)$$

Jmenovatele časových derivací variovaných konstant můžeme vyjádřit s ohledem na (5.55)

$$y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1y_2 = \Omega_D e^{-2D\Omega t} \quad (5.64)$$

a po dosazení do (5.63) dostaneme

$$\dot{c}_1 = -\frac{1}{\Omega_D} \mathbf{v}^T \mathbf{f}(t) e^{D\Omega t} \sin \Omega_D t = \frac{dc_1}{dt}, \quad \dot{c}_2 = \frac{1}{\Omega_D} \mathbf{v}^T \mathbf{f}(t) e^{D\Omega t} \cos \Omega_D t = \frac{dc_2}{dt}. \quad (5.65)$$

Pronásobením obou rovnic dt separujeme proměnné a po integraci dostaneme

$$c_1 = -\frac{1}{\Omega_D} \int_0^t \mathbf{v}^T \mathbf{f}(\tau) e^{D\Omega \tau} \sin \Omega_D \tau d\tau, \quad c_2 = \frac{1}{\Omega_D} \int_0^t \mathbf{v}^T \mathbf{f}(\tau) e^{D\Omega \tau} \cos \Omega_D \tau d\tau. \quad (5.66)$$

Po dosazení (5.66) do (5.56) dojdeme ke vztahu

$$\begin{aligned} x^P(t) &= -\frac{1}{\Omega_D} \int_0^t \mathbf{v}^T \mathbf{f}(\tau) e^{D\Omega \tau} \sin \Omega_D \tau d\tau e^{-D\Omega t} \cos \Omega_D t + \\ &+ \frac{1}{\Omega_D} \int_0^t \mathbf{v}^T \mathbf{f}(\tau) e^{D\Omega \tau} \cos \Omega_D \tau d\tau e^{-D\Omega t} \sin \Omega_D t = \frac{1}{\Omega_D} \int_0^t \mathbf{v}^T \mathbf{f}(\tau) e^{-D\Omega(t-\tau)} \sin \Omega_D(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Vrátíme-li se k index m i pro jednotlivá e-ení, m fíme celkové e-ení i -té modální výchylky napsat ve tvaru sou tu homogenního (5.54) a partikulárního e-ení (5.67) (psáno s indexem i)

$$x_i(t) = e^{-D_i \Omega_i t} (\alpha_i \cos \Omega_{Di} t + \beta_i \sin \Omega_{Di} t) + \frac{1}{\Omega_{Di}} \int_0^t \mathbf{v}_i^T \mathbf{f}(\tau) e^{-D_i \Omega_i (t-\tau)} \sin \Omega_{Di} (t-\tau) d\tau. \quad (5.68)$$

Poslední vztah lze zapsat v kompaktní form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{E}(t) [\mathbf{C}(t) + \mathbf{S}(t)] + \int_0^t \mathbf{E}(t-\tau) \mathbf{S}(t-\tau) \mathbf{V}^T \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (5.69)$$

a dále m fíme p ejít zp t k zobecn ým sou adnicím pomocí transforma ního vztahu $\mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \mathbf{x}(t)$, takže dostaneme

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \mathbf{E}(t) [\mathbf{C}(t) + \mathbf{S}(t)] + \mathbf{V} \int_0^t \mathbf{E}(t-\tau) \mathbf{S}(t-\tau) \mathbf{V}^T \mathbf{f}(\tau) d\tau, \quad (5.70)$$

kde matice obsažené ve vztahu (5.70) byly definovány ve vztazích (5.42) a (5.46). Vektory integra ních konstant a získáme z po áte ních podmínek. Proto musíme poslední vťah derivovat podle t . Derivujeme podle prom nné obsažené nejen v integrandu, ale také v mezi integrálu. Proto si p ípomeneme vztah pro derivaci integrálu

$$g(t) = \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} f(t, \tau) d\tau \quad (5.71)$$

podle parametru t , která má tvar

$$\frac{dg}{dt} = \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t} d\tau + \varphi_2'(t) f[\varphi_2(t), t] - \varphi_1'(t) f[\varphi_1(t), t] \quad (5.72)$$

V na-em p ípad

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \mathbf{E}(t-\tau) \mathbf{S}(t-\tau) \mathbf{V}^T \mathbf{f}(\tau) d\tau \right\} = \int_0^t [-\mathbf{D} \mathbf{E}(t-\tau) \mathbf{S}(t-\tau) + \mathbf{D} \mathbf{E}(t-\tau) \mathbf{C}(t-\tau)] \mathbf{V}^T \mathbf{f}(\tau) d\tau. \quad (5.73)$$

Druhý a t etí len v (5.72) jsou nulové. Nyní jiř m fíme vyjád it derivaci celého vektoru zobecn ých výchylek (5.70) ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) = & -\mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{E}(t) [\mathbf{C}(t) + \mathbf{S}(t)] + \mathbf{V} \mathbf{E}(t) \mathbf{D} [\mathbf{C}(t) - \mathbf{S}(t)] + \\ & + \mathbf{V} \int_0^t [-\mathbf{D} \mathbf{E}(t-\tau) \mathbf{S}(t-\tau) + \mathbf{D} \mathbf{E}(t-\tau) \mathbf{C}(t-\tau)] \mathbf{V}^T \mathbf{f}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Po dosazení po áte ních podmínek do (5.70) a (5.74) dostaneme ($t = 0$)

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{q}_0 = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{q}_0 = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0, \quad (5.75)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = -\mathbf{V} \mathbf{D} \underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0}_{\mathbf{q}_0} + \mathbf{V} \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{q}_0 = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{D} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0) \quad (5.76)$$

Celkové řešení nyní můžeme napsat ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}\mathbf{E}(t)\left[\mathbf{C}(t)\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{q}_0 + \mathbf{S}(t) \int_0^t (\mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{D} \mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{q}_0) + \mathbf{V} \int_0^t \mathbf{E}(t-\tau)\mathbf{S}(t-\tau)\mathbf{V}^T\mathbf{f}(\tau)d\tau.\right] \quad (5.77)$$

Jak známo z teorie diferenciálních rovnic, partikulární řešení může být jakákoliv funkce splňující (krom požadovaných podmínek diferencovatelnosti) pravou stranu. V našem případě, kdy jsme dospěli k partikulárnímu řešení pomocí variace konstant (konvolutorní integrál (5.67)), toto řešení odpovídá celkovému řešení rovnice s nulovými počátečními podmínkami. To má za následek skutečnost, že integrační konstanty celkového řešení jsou totožné s integračními konstantami samotného homogenního řešení. Proto první sčítanec v (5.77) je totožný s řešením volného kmitání (5.50). Zde je třeba si uvědomit, že $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T\mathbf{M}$. Zároveň můžeme říci, že celkové řešení (5.77) se skládá z řešení rovnice (5.1) bez buzení a z řešení s buzením, avšak s nulovými počátečními podmínkami. Pokud bychom však zvolili nebo odhadli partikulární řešení v jiném tvaru, není konvolutorní integrál (5.67), například ve tvaru funkce buzení, je třeba integrační konstanty počítat z celkového řešení.

5.5 Odhad partikulárního řešení soustavy buzené harmonicky s využitím komplexního tvaru pohybové rovnice

Předpokládejme, že chování kmitavého systému je popsáno pohybovou rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \sin \omega t, \quad (5.78)$$

kde \mathbf{f}_c resp. \mathbf{f}_s je vektor amplitud kosinových resp. sinových složek. Oba vektory jsou reálné. Pravou stranu můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \sin \omega t = \mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.79)$$

Na buzení (5.79), které je reálné, se můžeme dívat jako na reálnou složku komplexního buzení

$$\mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{f}_c e^{i\omega t} + \mathbf{f}_s e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} = \mathbf{f}_c e^{i\omega t} + \mathbf{f}_s e^{i\omega t} \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{-i}. \quad (5.80)$$

Zavedením vektoru komplexních amplitud buzení můžeme poslední vztah přepsat do tvaru

$$(\mathbf{f}_c - i\mathbf{f}_s) e^{i\omega t} = \mathbf{f} e^{i\omega t}, \quad (5.81)$$

ze kterého je význam vektoru komplexních amplitud buzení \mathbf{f} zřejmý. Slovně můžeme vztah (5.81) komentovat tak, že reálná část vektoru komplexních amplitud harmonického buzení je tvořena vektorem amplitud kosinové složky, zatímco imaginární část je tvořena záporn vzatým vektorem amplitud sinové složky. Dosadíme-li vztah pro komplexní buzení (5.81) do pohybové rovnice (5.78) a podobným způsobem jako pro buzení zavedeme vektor

komplexních výchylek $\ddot{\mathbf{q}}(t)$, jehož reálnou složku tvoří skutečný vektor zobecněných výchylek, můžeme psát

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}e^{i\omega t}. \quad (5.82)$$

Odhadneme-li partikulární řešení podle pravé strany ve tvaru $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_a e^{i\omega t}$ a dosadíme-li je do poslední rovnice, dostaneme amplitudový tvar rovnice (5.82)

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K})\mathbf{q}_a = \mathbf{f}, \quad (5.83)$$

z něhož získáme vektor komplexních amplitud výchylek ve tvaru

$$\mathbf{q}_a = (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \mathbf{f} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{f}, \quad (5.84)$$

kde $\mathbf{Z}(\omega) \in \mathbf{C}^{n,n}$ je matice dynamické tuhosti a $\mathbf{H}(\omega = 2\pi f) \in \mathbf{C}^{n,n}$ je matice dynamické poddajnosti, která bývá nazývána maticí frekvenčních plynů. Skutečné partikulární řešení vektoru výchylek dostaneme jako reálnou složku komplexního vektoru výchylek

$$\text{Re}\{\mathbf{q}_a e^{i\omega t}\} = \text{Re}\{(\mathbf{q}_r + i\mathbf{q}_i)(\cos \omega t + i \sin \omega t)\} = \mathbf{q}_r \cos \omega t - \mathbf{q}_i \sin \omega t. \quad (5.85)$$

Příklad 5.1

Ukažme si pro ilustraci celkové řešení netlumeného systému s n° volnosti buzeného harmonicky pomocí odhadnutého partikulárního řešení a pomocí vypočteného partikulárního řešení ve tvaru konvolutorního integrálu. Předpokládejme, že chování kmitavého systému je popsáno pohybovou rovnicí a počátečními podmínkami

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \sin \omega t, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (5.86)$$

S ohledem na (5.81) přepíšeme poslední rovnici do tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}e^{i\omega t}. \quad (5.87)$$

Po provedení modální analýzy získáme z matic \mathbf{M} a \mathbf{K} modální matici \mathbf{V} a spektrální matici $\mathbf{\Lambda}$. Pomocí těchto matic můžeme zapsat homogenní řešení, které má v obou případech stejný tvar (5.44)

$$\mathbf{q}^H(t) = \mathbf{V}\mathbf{x}^H(t) = \mathbf{V}[\mathbf{C}(t) + \mathbf{S}(t)]. \quad (5.88)$$

Všechny ostatní symboly v (5.88) již byly vysvětleny. Horní index H v tomto případě označuje homogenní řešení a nemá nic společného s Hermiteovou transpozicí. Stejně jako značí, že homogenní řešení můžeme vyjádřit komplexně. Vektory integračních konstant a budeme v obou případech následně považovat rozdílným způsobem a dále s ohledem na skutečnost, že je systém netlumený, platí

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{I}. \quad (5.89)$$

a) Celkové e-ení pomocí odhadu partikulárního e-ení a modální transformace

Nejdříve provedeme modální transformaci

$$\ddot{\mathbf{q}}^P(t) = \mathbf{V} \mathbf{x}^P(t) \quad (5.90)$$

a po dosazení (5.90) do (5.87) a pronásobení výsledné rovnice \mathbf{V}^T zleva dostaneme s ohledem na (5.27)

$$-\omega^2 \ddot{\mathbf{x}}^P(t) + \mathbf{x}^P(t) = \mathbf{V}^T \ddot{\mathbf{f}} e^{i\omega t}. \quad (5.91)$$

Partikulární e-ení rovnice (5.91) odhadneme podle tvaru pravé strany ve tvaru

$$\mathbf{x}^P(t) = \mathbf{x}_a e^{i\omega t}, \quad (5.92)$$

dosadíme do (5.91) a dostaneme rovnici

$$(\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{x}_a = \mathbf{V}^T \ddot{\mathbf{f}}, \quad (5.93)$$

která má e-ení

$$\mathbf{x}_a = (\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T \ddot{\mathbf{f}}. \quad (5.94)$$

Po dosazení (5.94) do (5.92) dojdeme k výrazu

$$\mathbf{x}^P(t) = (\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T \ddot{\mathbf{f}} e^{i\omega t} \quad (5.95)$$

a po návratu k původním souadnicím podle (5.90) dostaneme

$$\ddot{\mathbf{q}}^P(t) = \mathbf{V} (\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T \ddot{\mathbf{f}} e^{i\omega t}. \quad (5.96)$$

Celkové e-ení je součet homogenního (5.88) a partikulárního (5.96) e-ení a má tvar

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{V} [\mathbf{C}(t) + \mathbf{S}(t)] + \mathbf{V} (\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T \ddot{\mathbf{f}} e^{i\omega t}. \quad (5.97)$$

Skutečné e-ení je reálnou částí komplexního e-ení (5.97). Homogenní e-ení (5.88) a tudíž první sčítanec v (5.97) je reálný, proto homogenní e-ení (5.88) nebylo označeno stíčkou. (Modální matice, spektrální matice a vlastní frekvence jsou pro nás vyetované soustavy reálné). Prozatím zstaneme u celkového komplexního e-ení a ke skutečnému e-ení přejdeme až po určení integrálních konstant. Ty určíme zpočátečních podmínek. Za tím účelem derivujeme (5.97) a píšeme

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{V} [-\mathbf{S}(t) + \mathbf{C}(t)] + i\omega \mathbf{V} (\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T \ddot{\mathbf{f}} e^{i\omega t}. \quad (5.98)$$

Po dosazení počáteční podmínky $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ do (5.97) dostaneme

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{V} + \mathbf{V} (\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T \ddot{\mathbf{f}}, \quad (5.99)$$

ze které plyne ($\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T \mathbf{M}$)

$$= \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0 - (\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T \ddot{\mathbf{f}}. \quad (5.100)$$

Nyní dosadíme počáteční podmínku $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$ do (5.98) a máme

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{V} + i\omega \mathbf{V} (\mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T \ddot{\mathbf{f}}, \quad (5.101)$$

ze které plyne ($\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T \mathbf{M}$)

$$= -\mathbf{V}^T \mathbf{M} \left[\dot{\mathbf{q}}_0 - i\omega \mathbf{V} \left(-\omega^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{f} \right]. \quad (5.102)$$

Ze tvaru vektorů integračních konstant je zřejmé, že jsou ovlivněny i buzením (pravou stranou pohybové rovnice (5.87)) a jsou obecně komplexní. Toto pravidlo neplatí jen v případě, že partikulární řešení vypočítáme pomocí variace konstant (výsledkem je konvolutorní integrál), jak uvidíme dále. Nyní vyjádříme celkové komplexní řešení (5.97), kam dosadíme vypočtené vektory integračních konstant (5.100) a (5.102). Po malé úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}(t) = & \mathbf{VC}(t) \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 - \mathbf{VC}(t) \left(-\omega^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{f} + \mathbf{VS}(t) \left(-\mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 - \right. \\ & \left. - i\omega \mathbf{VS}(t) \left(-\omega^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{f} + \mathbf{V} \left(-\omega^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{f} e^{i\omega t} \right). \end{aligned} \quad (5.103)$$

Skutečné řešení je tvořeno reálnou částí posledního výrazu, což si ukážeme níže.

b) Celkové řešení pomocí partikulárního řešení ve tvaru konvolutorního integrálu a modální transformace

V tomto případě můžeme použít homogenní řešení již přímo ve tvaru (5.50), kde $\mathbf{E}(t) = \mathbf{I}$, $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Dostaneme

$$\dot{\mathbf{q}}^H(t) = \mathbf{VC}(t) \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{VS}(t) \left(-\mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 \right). \quad (5.104)$$

Zde jsme homogenní řešení označili bez stíky, protože je reálné. Partikulární řešení má v tomto případě tvar konvolutorního integrálu (druhý sčítanec v (5.70)), kde $\mathbf{E}(t - \tau) = \mathbf{I}$, $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{f}(\tau) = \mathbf{f} e^{i\omega\tau}$, který má nyní tvar

$$\ddot{\mathbf{q}}^P(t) = \mathbf{V}^{-1} \int_0^t \mathbf{S}(t - \tau) \mathbf{V}^T \mathbf{f} e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (5.105)$$

Partikulární řešení je opět označeno stíkou, protože jsme zavedli komplexní buzení. S ohledem na platnost vztahu

$$\int_0^t e^{i\omega\tau} \sin \Omega_\nu(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\Omega_\nu^2 - \omega^2} (\Omega_\nu e^{i\omega t} - i\omega \sin \Omega_\nu t - \Omega_\nu \cos \Omega_\nu t), \quad (5.106)$$

můžeme (5.105) přepsat do tvaru

$$\ddot{\mathbf{q}}^P(t) = \mathbf{V} \left(-\omega^2 \mathbf{I} \right)^{-1} [\mathbf{I} e^{i\omega t} - i\omega \left(-\mathbf{S}(t) - \mathbf{C}(t) \right)] \mathbf{V}^T \mathbf{f} \quad (5.107)$$

a celkové řešení je součtem (5.104) a (5.107)

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{VC}(t) \mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{VS}(t) \left(-\mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 \right) + \mathbf{V} \left(-\omega^2 \mathbf{I} \right)^{-1} [\mathbf{I} e^{i\omega t} - i\omega \left(-\mathbf{S}(t) - \mathbf{C}(t) \right)] \mathbf{V}^T \mathbf{f}, \quad (5.108)$$

což je tvar totožný s (5.103). V tomto druhém případě je homogenní řešení tvořeno prvními dvěma členy (5.108) a je, jak už bylo uvedeno, reálné. Nyní můžeme vyjádřit skutečné řešení (řešení popisující skutečné chování systému), jako reálnou část komplexního řešení (5.108). Zde je třeba si uvědomit, že

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_c - i\mathbf{f}_s \quad \text{a} \quad e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad (5.109)$$

takže

$$e^{i\omega t} \mathbf{f} = \mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \sin \omega t + i(\mathbf{f}_c \sin \omega t - \mathbf{f}_s \cos \omega t) \Rightarrow \operatorname{Re} \{ e^{i\omega t} \mathbf{f} \} = \mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \sin \omega t, \quad (5.110)$$

$$i\omega\ddot{\mathbf{f}} = i\omega\mathbf{f}_c + \omega\mathbf{f}_s \Rightarrow \operatorname{Re}\{i\omega\ddot{\mathbf{f}}\} = \omega\mathbf{f}_s, \quad (5.111)$$

$$\ddot{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_c - i\mathbf{f}_s \Rightarrow \operatorname{Re}\{\ddot{\mathbf{f}}\} = \mathbf{f}_c. \quad (5.112)$$

Ve sv tle posledních t í vztah p í-eme reálnou ást rovnice (5.108) ve tvaru

$$\boxed{\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}\mathbf{C}(t)\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{q}_0 + \mathbf{V}\mathbf{S}(t)^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{V}(-\omega^2\mathbf{I})^{-1}[\mathbf{V}^T(\mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \sin \omega t) - \omega^{-1}\mathbf{S}(t)\mathbf{V}^T\mathbf{f}_s - \mathbf{C}(t)\mathbf{V}^T\mathbf{f}_c]}. \quad (5.113)}$$

P íklad 5.2

Jako p íklad si uve me výpo et odezvy na impulsní buzení dv ma zp soby. První p edstavuje zm nu po áte ních rychlostí p sobením impulsu a dal-í výpo et odpovídá volnému kmitání soustavy se zm n nými po áte ními podmínkami. P edpokládejme, že pohybová rovnice v etn po áte ních podmínek má tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{i}\delta(t), \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0, \quad (5.114)$$

kde všechny symboly na levé stran ějíl byly vysv tleny a na pravé stran ě je konstantní vektor \mathbf{i} násoben jednotkovým Diracovým impulsem. Vektor \mathbf{i} m ě vyjad ovat distribuci impulsu po soustav ě. Dále p edpokládáme, že impuls prob hne v nekone n krátké dob ě.

a) e-ení volného kmitání se zm nou po áte ních podmínek

Z v ty o zm n ěbnosti (zm na ěbnosti je rovna impulsu síly) m ěme vypo ítat

$$\mathbf{M}\dot{\ddot{\mathbf{q}}}_0 - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0 = \int \mathbf{i}\delta(t)dt = \mathbf{i} \underbrace{\int \delta(t)dt}_1 = \mathbf{i} \Rightarrow \dot{\ddot{\mathbf{q}}}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{i}, \quad (5.115)$$

což je nový vektor po áte ních zobecn ěných rychlostí. Ostatní po áte ní podmínky z stávají stejné. Nyní e-íme rovnici volných kmit ě soustavy popsáných diferenciální rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\ddot{\mathbf{q}}}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{i}. \quad (5.116)$$

Dosadíme-li do vztahu (5.50) místo $\dot{\mathbf{q}}_0$ hodnotu $\dot{\ddot{\mathbf{q}}}_0$, dostaneme vztah

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}\mathbf{E}(t)[\mathbf{C}(t)\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{q}_0 + \mathbf{S}(t)^{-1}(\mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{i})]. \quad (5.117)$$

b) e-ení vynuceného kmitání

Dosadíme-li do vztahu (5.77) za $\mathbf{f}(\tau)$ výraz $\mathbf{i}\delta(\tau)$, dostaneme

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}\mathbf{E}(t)[\mathbf{C}(t)\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{q}_0 + \mathbf{S}(t)^{-1}(\mathbf{V}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{q}_0)] + \mathbf{V} \int_0^t \mathbf{E}(t-\tau)\mathbf{S}(t-\tau)\mathbf{V}^T\mathbf{i}\delta(\tau)d\tau. \quad (5.118)$$

Nyní vyufijeme vlastnosti Diracova impulsu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0). \quad (5.119)$$

Pak integrál ve vztahu (5.118) bude roven funk ní hodnot ě integrandu v míst ě $\tau = 0$ což dává

$$\mathbf{V}^{-1} \int_0^t \mathbf{E}(t-\tau) \mathbf{S}(t-\tau) \mathbf{V}^T \mathbf{i} \delta(\tau) d\tau = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{E}(t) \mathbf{S}(t) \mathbf{V}^T \mathbf{i} = \mathbf{V} \mathbf{E}(t) \mathbf{S}(t) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{i}, \quad (5.120)$$

protože diagonální matice $\mathbf{E}(t)$, $\mathbf{S}(t)$, \mathbf{V}^{-1} komutují, a celý výraz (5.118) dostane tvar

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \mathbf{E}(t) [\mathbf{C}(t) \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0 + \mathbf{S}(t) \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{V}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{V}^T \mathbf{i} + \mathbf{D} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0)], \quad (5.121)$$

což je výraz totožný s (5.117)

Literatura:

- [1] Rosenberg, J.: Kinematika. Skripta VTŠE v Plzni, Plzeň 1981.
- [2] Janeček, O.-Zeman, V.: Technická dynamika. Skripta VTŠE v Plzni, Plzeň 1980.
- [3] Pachová, Z., Frey, T.: Vektorová a tenzorová algebra, SNTL Praha 1964.
- [4] Zeman, V.-Laš. V.: Dynamika v příkladech. Skripta VTŠE v Plzni 1989.
- [5] Dupal, J.: Výpočtové metody mechaniky. Skripta ke stejnojmennému předmtu na FAV ZU v Plzni, Plzeň 2004 (poslední vydání)