



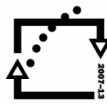
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce

Mechanika vozidel

Část 5

Učební text k předmětu
KME/MV Mechanika vozidel

doc.Ing.Jaromír Švígler, CSc.

2013

5 KINEMATICKÁ SYNTÉZA VOZIDLOVÝCH MECHANISMŮ

Při syntéze mechanického systému požadujeme, aby mechanismus zajistil žádané kinematické veličiny (polohu, případně i rychlost a zrychlení) bodů nebo členů kinematického řetězce. Často chceme, aby určitý bod nebo člen daného řetězce konal požadovaný pohyb ve smyslu **zaujmutí předepsaných poloh** s případně požadovanými kinematickými veličinami a hovoříme o kinematické rozměrové syntéze. Pro řešení takto chápané syntézy používáme **kolokační metody** a budeme hovořit o **syntéze ve fázích**. V teorii automobilů je někdy potřebné zajistit s velkou přesností dodržení požadovaných kinematických veličin řešeného členu ve zvolené poloze jako je tomu u závěsu kol u řídicího systému. Pro rychlé řešení je vhodná **kinematická metoda** založená na využití kinematických veličin charakterizujících okamžitý pohybový stav členu a pro takto chápanou syntézu budeme hovořit o **lokální syntéze**. Souhrnně můžeme proto syntézu rozdělit následujícím způsobem:

fázová syntéza:

- metoda kolokační:
 - Blochova metoda komplexních čísel
 - maticová metoda postupných oprav

lokální syntéza:

- metoda kinematická

5.1 Blochova metoda komplexních čísel

Jak je řečeno v úvodu, u kolokační metody vyžadujeme [2], aby mechanismus měl požadované kinematické veličiny vybraných členů přesně v jenom v určitých polohách mechanismů a mimo tyto polohy může být požadovaný pohyb realizován přibližně.

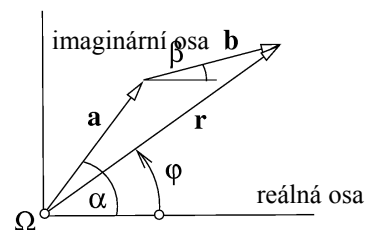
Před dalším výkladem si připomeneme některé potřebné základní operace s komplexními čísly a připomeneme si, že vektor **a** můžeme v Gaussově rovině komplexních čísel zapsat třemi způsoby:

$\mathbf{a} = a_x + i a_y = a (\cos \alpha + i \sin \alpha) = a e^{i\alpha}$, kde $a = |\mathbf{a}|$ je absolutní hodnota vektoru **a** $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ je Eulerův vztah, který jsme použili k zápisu v goniometrickém tvaru. Součet vektorů, horní část obr. 70, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ má po rozepsání do souřadnicových os tvar

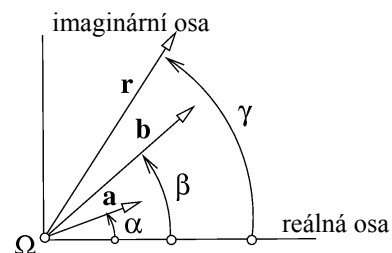
$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = a(\cos \alpha + i \sin \alpha) + b(\cos \beta + i \sin \beta).$$

Skalární násobení vektorů $\mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ můžeme vyjádřit pomocí goniometrického tvaru, prostřední část obr. 73, $r e^{i\gamma} = a e^{i\alpha} b e^{i\beta}$, kde $r = ab$, $\gamma = \alpha + \beta$.

Vektorový součin vektorů $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je znázorněn v prostřední části obr. 73.



Součet vektorů



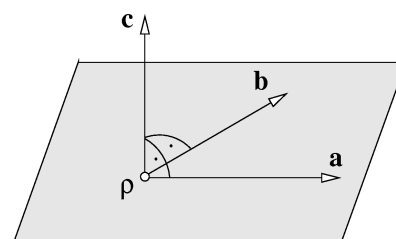
Skalární součin vektorů

Poznámka

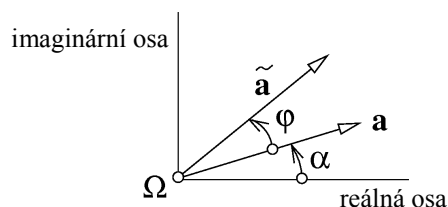
Zavedme jednotkový vektor \mathbf{e} , $|\mathbf{e}|=1$, který bude mít v goniometrickém zápisu tvar $e^{i\varphi}$. Potom násobení libovolného vektoru \mathbf{a} jednotkovým vektorem \mathbf{e} představuje pootočení vektoru \mathbf{a} o úhel φ , neboť $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = a e^{i\alpha} e^{i\varphi} = a e^{i(\alpha+\varphi)}$.

Vektor \mathbf{a} v nové poloze označíme $\tilde{\mathbf{a}}$ a přiřadíme mu komplexní číslo \tilde{a} . Situace je ukázána v dolní části obr. 73.

Blochova metoda využívá uvedených operací k syntéze poloh kloubových mechanismů.



Vektorový součin vektorů

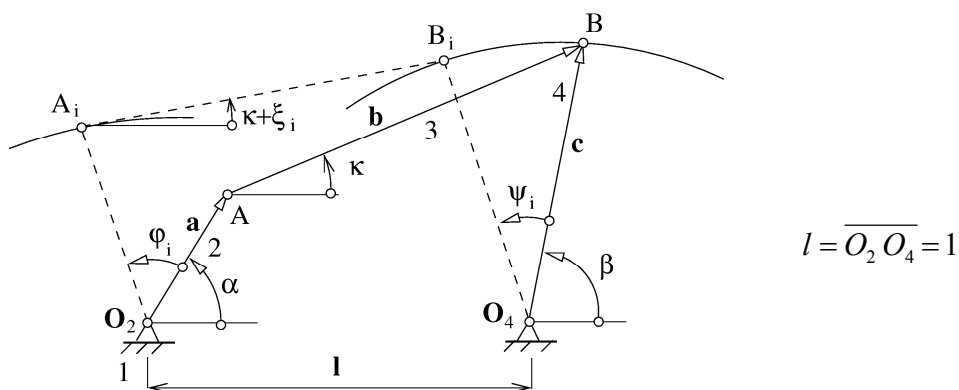


Obr. 73 Početní operace s vektory

Příklad 13

U čtyřkloubového mechanismu je požadováno navrhnout jeho rozměry tak, aby pro tři dané polohy hnací kliky 2 zaujaly členy 3 a 4 žádané polohy. Jinak řečeno, pro počáteční úhly κ, α, β a předepsané úhly φ_i, ψ_i, ξ_i , potřebujeme určit délky a, b, c .

Situace je znázorněna na obr. 74, kde přírůstky počátečního úhlu sklonu těhlice κ jsou označeny ξ_i a přírůstky polohových úhlů α hnacího členu 2 a β hnaného členu 4, jsou $\varphi_i, \psi_i, i=1, 2$.



Obr. 74 Syntéza čtyřkloubového mechanismu

Počáteční poloha mechanismu je označena plnými čarami, obecná poloha je vyznačena čárkovaně. Podle vektorové metody probírané v základním kurzu mechaniky můžeme psát vektorový vztah

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{l} + \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{l}, \quad (219)$$

který vyjádříme v komplexním tvaru pro tři požadované polohy hnacího členu, tedy pro $\alpha, \alpha + \varphi_1, \alpha + \varphi_2$ a pro $|\mathbf{l}|=1$

$$\begin{aligned} a e^{i\alpha} + b e^{i\kappa} - c e^{i\beta} &= 1 e^{i0}, \\ a e^{i(\alpha+\varphi_1)} + b e^{i(\kappa+\xi_1)} - c e^{i(\beta+\psi_1)} &= 1 e^{i0}, \\ a e^{i(\alpha+\varphi_2)} + b e^{i(\kappa+\xi_2)} - c e^{i(\beta+\psi_2)} &= 1 e^{i0}. \end{aligned} \quad (220)$$

Rov. (220), která vyjadřuje pootočení členů 2, 3, 4 o úhly φ_i, ψ_i, ξ_i , můžeme zapsat jako násobky jednotkových vektorů ve tvaru

$$\begin{aligned}\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c} &= 1, \\ \tilde{a} e^{i\varphi_1} + \tilde{b} e^{i\xi_1} - \tilde{c} e^{i\psi_1} &= 1, \\ \tilde{a} e^{i\varphi_2} + \tilde{b} e^{i\xi_2} - \tilde{c} e^{i\psi_2} &= 1,\end{aligned}\tag{221}$$

kde $\tilde{a} = a e^{i\alpha}$, $\tilde{b} = b e^{i\kappa}$, $\tilde{c} = c e^{i\beta}$ jsou hledané neznámé, které určíme použitím Cramerova pravidla. Determinant soustavy je

$$D_o = \begin{vmatrix} 1, & 1, & -1 \\ e^{i\varphi_1}, & e^{i\xi_1}, & -e^{i\psi_1} \\ e^{i\varphi_2}, & e^{i\xi_2}, & -e^{i\psi_2} \end{vmatrix}\tag{222}$$

a hledané veličiny jsou určeny vztahy

$$\tilde{a} = \frac{\begin{vmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 1, & e^{i\xi_1}, & -e^{i\psi_1} \\ 1, & e^{i\xi_2}, & -e^{i\psi_2} \end{vmatrix}}{D_o} = \frac{D_1}{D_o}, \quad \tilde{b} = \frac{\begin{vmatrix} 1, & 1, & -1 \\ e^{i\varphi_1}, & 1, & -e^{i\psi_1} \\ e^{i\varphi_2}, & 1, & -e^{i\psi_2} \end{vmatrix}}{D_o} = \frac{D_2}{D_o}, \quad \tilde{c} = \frac{\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ e^{i\varphi_1}, & e^{i\xi_1}, & 1 \\ e^{i\varphi_2}, & e^{i\xi_2}, & 1 \end{vmatrix}}{D_o} = \frac{D_3}{D_o}.\tag{223}$$

Rekapitulace řešení pro tři polohy hnací a hnané kliky je taková, že pro dané α, β, κ volíme φ_i, ψ_i, ξ_i , $i=1, 2$ a určíme a, b, c .

Příklad 14

Pro dané čtyři polohy hnacího členu 2 čtyřkloubového mechanismu požadujeme určit jeho rozměry tak, aby členy 3 a 4 zaujaly při svém pohybu požadované polohy. Platí situace na obr. 74, kde pro počáteční hodnoty úhlů α, β, κ a předepsané úhly φ_i, ψ_i, ξ_i , $i=1 \div 3$ potřebujeme určit rozměry mechanismu a, b, c, l , kde opět položíme $l=1$. Platí rov. (219), která přejde pro čtyři požadované polohy hnacího členu 2 na soustavu čtyř komplexních rovnic

$$\begin{aligned}\tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{c} &= 1, \\ \tilde{a} e^{i\varphi_1} + \tilde{b} e^{i\xi_1} - \tilde{c} e^{i\psi_1} &= 1, \\ \tilde{a} e^{i\varphi_2} + \tilde{b} e^{i\xi_2} - \tilde{c} e^{i\psi_2} &= 1, \\ \tilde{a} e^{i\varphi_3} + \tilde{b} e^{i\xi_3} - \tilde{c} e^{i\psi_3} &= 1,\end{aligned}\tag{224}$$

kteřá je analogická soustavě rovnic (221) a rovněž význam všech veličin v obou soustavách je stejný. Veličiny $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ určíme z libovolných tří rovnic, třeba z prvních tří. Podmínku pro určené veličiny $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ takovou, aby platila i poslední rovnice soustavy (224) získáme, když do čtvrté rovnice dosadíme vypočtené hodnoty $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ vyjádřené Cramerovým pravidlem jako podíl, rov. (223), dvou determinantů.

Dostaneme rovnici

$$D_1 \cdot e^{i\varphi_3} + D_2 \cdot e^{i\xi_3} - D_3 \cdot e^{i\psi_3} = D_0, \quad (225)$$

kteřou můžeme pomocí determinantů D_1, D_2, D_3 vyjádřit ve tvaru determinantu

$$D' \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{i\varphi_1} & e^{i\xi_1} & -e^{i\psi_1} \\ 1 & e^{i\varphi_2} & e^{i\xi_2} & -e^{i\psi_2} \\ 1 & e^{i\varphi_3} & e^{i\xi_3} & -e^{i\psi_3} \end{vmatrix} = 0 \quad (226)$$

Rozvedením podle posledního řádku dostaneme rov. (225). Vyčíslením determinantu D' získáme rovnici pro určení hodnoty jednoho úhlu ξ .

Rekapitulací řešení pro určení čtyř poloh hnací a hnané kliky, tedy určení a, b, c , vidíme, že splnění požadavku zaujmutí požadovaných poloh členů 2 a 4, daných úhly $\alpha, \beta, \varphi_i, \psi_i, i=1 \div 3$, je splněno úplně a požadavek zaujmutí polohy těhlice 3 je splněn pro dvě polohy, třeba $\xi_i, i=1, 2$ a třetí polohu ξ_3 musíme určit.

5.2 Maticová metoda postupných oprav

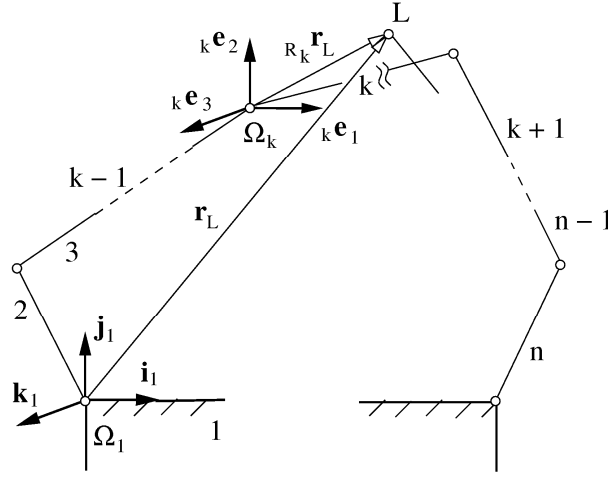
Výklad rozdělíme na tři části, ve kterých se zmíníme o maticové metodě, dále o matici oprav a posléze o vlastní syntéze mechanismu.

5.2.1 Maticová metoda určení polohy mechanismu

Jak jsme uvedli v úvodu čtvrté kapitoly, jsou mechanismy tvořeny soustavou těles, která jsou vzájemně spojena kinematickými dvojicemi a vytváří rovinné nebo prostorové kinematické řetězce. Polohu mechanismu můžeme [4] určit pomocí matic následujícím postupem. Kinematický řetězec uvažovaného mechanismu, obr. 75, obsahujícího n členů, přerušíme v k -tém členu myšleným řezem. Původní řetězec se rozpadne na dva řetězce s počty členů p_1 a p_2 , pro které platí $p_1 = 1, 2, 3, \dots, k-1, k$ a $p_2 = 1, n, n-1, k+1, k$. Bod L členu k koná stejný pohyb ať přiřadíme člen k prvnímu nebo ke druhému řetězci. Musí proto platit identita

$$\mathbf{T}_{R_2 R_1} \mathbf{T}_{R_3 R_2} \dots \mathbf{T}_{R_k R_{k-1}} \mathbf{r}_L = \mathbf{T}_{R_n R_1} \mathbf{T}_{R_{n-1} R_n} \dots \mathbf{T}_{R_k R_{k+1}} \mathbf{r}_L, \quad (227)$$

kteřá představuje maticovou kinematickou rovnici mechanismu, kde $\mathbf{T}_{R_b R_a}$, viz rov. (137), je transformační matice mezi členy b, a , respektive mezi prostory R_b a R_a , ve kterých jsou členy a, b umístěny.



Obr. 75 Kinematický řetězec

5.2.2 Matice oprav

Vzájemná poloha dvou členů a, b kinematického řetězce je určena transformační maticí $T_{R_b R_a}$. Změní-li těleso b svoji polohu o malé přemístění a přejde do blízké polohy b' , je přemístění $b \rightarrow b'$ určeno maticí $\mathbf{T}_{R_{b'} R_b} = \mathbf{O}_{b'b}$ a transformační matice mezi členem a a novou polohou b' členu b je $\mathbf{T}_{R_{b'} R_a}$. Schematicky tuto situaci zapíšeme následujícím způsobem $b \rightarrow a: \mathbf{T}_{R_b R_a}, b \rightarrow b': \mathbf{T}_{R_{b'} R_b} = \mathbf{O}_{b'b}, b' \rightarrow a: \mathbf{T}_{R_{b'} R_a}$.

Potom platí

$$\tilde{\mathbf{T}}_{R_b R_a} = \mathbf{T}_{R_b R_a} \mathbf{T}_{R_{b'} R_b} = \mathbf{T}_{R_b R_a} \mathbf{O}_{b'b}, \quad (228)$$

kde matici $\mathbf{O}_{b'b}$ budeme nazývat maticí oprav a matici $\tilde{\mathbf{T}}_{b'a}$ maticí opravenou. Poznamenejme, že věta o záměnnosti transformačních matic základních pohybů uvedená v kapitole věnované kinematické analýze, platí i v tomto případě. Matici oprav $\mathbf{O}_{b'b}$, která vyjadřuje jak změnu souřadnic polohy, tak rovněž i změnu rozměrů můžeme pro použití rozšířených vektorů napsat ve tvaru

$$\mathbf{O}_{b'b} = \begin{bmatrix} 1, & -\Delta\varphi_z, & \Delta\varphi_y, & \Delta x \\ \Delta\varphi_z, & 1, & -\Delta\varphi_x, & \Delta y \\ -\Delta\varphi_y, & \Delta\varphi_x, & 1, & \Delta z \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad (229)$$

kde jednotlivá natočení a posuvy resultují ze změn rozměrů a ze změn souřadnic. Protože každou transformační matici můžeme vyjádřit jako součin dílčích transformačních matic, můžeme pro transformaci mezi členy a, b psát

$$\mathbf{T}_{R_b R_a} = \prod_{j=1}^N T_{R_{b_j} R_{a_j}}(q_j), \quad (230)$$

kde q_j , je zobecněný parametr, N je počet uvažovaných parametrů udávajících polohu b vzhledem k a , j je j -tý parametr a j -tá transformace. S použitím matice oprav můžeme rov. (230) přepsat do tvaru pro změněnou polohu členu b

$$\tilde{\mathbf{T}}_{R_b R_a} = \prod_{j=1}^N \mathbf{T}_{R_{b_j} R_{a_j}}(q_j) \mathbf{O}_{b' j b j}(\Delta q_j), \quad (231)$$

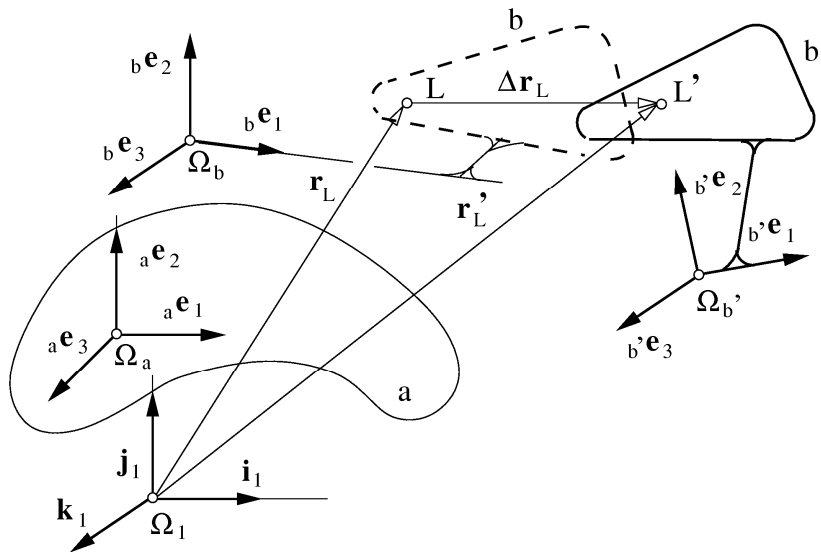
kde $\mathbf{O}_{b' j b j}(\Delta q_j) = \mathbf{T}_{R_{b' j} R_{b j}}(q_j)$, je matice oprav parametru q_j , a Δq_j je oprava parametru q_j . Připomeňme si, že z fyzikálního hlediska vyjadřují rovnice (230) a (231) polohu členu b v původní, respektive v pozměněné poloze vzhledem ke členu a .

Polohu bodu L' , obr. 76, kterou v rozšířených souřadnicích vyjádříme formálně vztahem

$$\mathbf{r}_{L'} = \mathbf{r}_L + \Delta \mathbf{r}_L = \begin{bmatrix} x_L, y_L, z_L, 1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \Delta x_L, \Delta y_L, \Delta z_L, 0 \end{bmatrix}^T, \quad (232)$$

můžeme potom zapsat v prostoru R_1 ve tvaru

$${}_{R_1} \mathbf{r}_{L'} = {}_{R_1} \mathbf{r}_L + \mathbf{T}_{R_a R_1} \Delta {}_{R_a} \mathbf{r}_L = {}_{R_1} \mathbf{r}_L + \mathbf{T}_{R_a R_1} \prod_{j=1}^N \mathbf{T}_{R_{b_j} R_{a_j}}(q_j) \mathbf{O}_{b' j b j}(\Delta q_j) \quad (233)$$



Obr. 76 Přemístění tělesa b

5.2.3 Syntéza mechanismu

Metodu syntézy kterou uvedeme, nazýváme maticovou kolokační metodou postupných oprav [4], neboť u ní vyžadujeme, aby vybrané členy řešeného mechanismu dávaly požadované kinematické veličiny, kterými jsou poloha, rychlost a zrychlení bodů a členů mechanismu přesně jen v určitých polohách mechanismu, aby zde kolokovaly. Mimo tyto polohy je předepsaná funkce pohybu realizována jenom přibližně.

5.2.3.1 Základní rovnice syntézy

V následujícím výkladu budeme mít na paměti, že při syntéze mechanismů se uplatní jenom změny rozměrů. Použitím rov. (227) a (228) můžeme pro k -tý člen kinematického řetězce mechanismu psát základní maticovou rovnici syntézy mechanismu

$$\tilde{\mathbf{T}}_{R_2 R_1} \mathbf{T}_{R_3 R_2} \dots \tilde{\mathbf{T}}_{R_k R_{k-1}} \mathbf{r}_{L'} = \tilde{\mathbf{T}}_{R_n R_1} \tilde{\mathbf{T}}_{R_{n-1} R_n} \dots \tilde{\mathbf{T}}_{R_{k+1} R_{k+2}} \tilde{\mathbf{T}}_{R_k R_{k+1}} \mathbf{r}_{L'}, \quad (234)$$

ze které získáme identitu

$$\tilde{\mathbf{T}}_{R_2 R_1} \mathbf{T}_{R_3 R_2} \dots \tilde{\mathbf{T}}_{R_k R_{k-1}} = \tilde{\mathbf{T}}_{R_n R_1} \tilde{\mathbf{T}}_{R_{n-1} R_n} \dots \tilde{\mathbf{T}}_{R_{k+1} R_{k+2}} \tilde{\mathbf{T}}_{R_k R_{k+1}}. \quad (235)$$

Do rov. (235) dosadíme rov. (228), případně již rov. (231) za opravené matice rozměrů a uspořádáme podle oprav jednotlivých rozměrů u členů na obou stranách rovnice. Provedeme linearizaci, při které zanedbáme nelineární výrazy vyskytující se v opravách a získaný vztah vyjádříme [4] symbolickou rovnicí

$$\mathbf{M}_o + \mathbf{M}_1 \Delta \rho_1 + \dots + \mathbf{M}_l \Delta \rho_l = 0, \quad (236)$$

kde $\Delta \rho_p$, $p=1 \div l$ jsou opravy geometrických rozměrů ρ_p členů mechanismu a M jsou matice obsahující rozměry členů. U mechanismu s 1° volnosti je ale pouze šest parametrů q_j nezávislých. Proto, podobně jako u příkladu 12 ve čtvrté kapitole obsahuje soustava (236) jenom šest nezávislých parametrů, takže v dalším postupu představuje soustavu šesti nezávislých skalárních rovnic. Ještě jednou připomeneme, že máme na mysli rozměrovou syntézu a proto těchto šest nezávislých rovnic vyjádříme v maticovém zápisu vztahem

$$\mathbf{H} \Delta \mathbf{p} = \mathbf{h}, \quad (237)$$

kde matice $\mathbf{H} = \mathbf{H}(q_j, q_{jo}, \rho_p)$ obsahuje jednak parametry q_j , z toho je šest parametrů q_{jo} nezávislých a jednak rozměry mechanismu ρ_p . Podobně vektor pravých stran je $\mathbf{h} = \mathbf{h}(q_j, q_{jo}, \rho_p)$ a $\Delta \mathbf{p} = \|\Delta \mathbf{p}\|$ je vektor oprav uvažovaných rozměrů ρ_p . Kinematické veličiny členů mechanismu jsou tvořeny jejich rychlostmi a zrychleními, které získáme derivací rov. (237) podle času. První derivací dostaneme vztah vyjadřující rychlost členů mechanismu v závislosti na parametrech ve tvaru

$$\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_{jo}} q_{jo} \right) \Delta \mathbf{p} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q_j} \dot{q}_{jo} \quad (238)$$

Další derivací, kterou nebudeme pro nedostatek místa provádět, bychom získali vztah pro zrychlení, neboli pro změnu rychlosti členů mechanismu.

5.2.3.2 Určení rozměrů mechanismu

Předpokládejme, že v obecném případě jsou parametry soustavy q_j funkcí nezávislých parametrů q_{jo} , takže platí $q_j = q_j(q_{jo})$, kde $q_{jo} = q_{jo}(t)$ na daném intervalu $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$. Zobecněním pro všechny parametry q_j dostaneme v maticovém zápisu

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j(\mathbf{q}_{jo}) \wedge \dot{\mathbf{q}}_j = \dot{\mathbf{q}}_j(t). \quad (239)$$

Ještě jednou si připomeneme, že se zabýváme syntézou rozměrů ρ . Časovou derivací rov. (239) dostaneme průběhy rychlostí parametrů q_j ve tvaru

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \sum_{i=1}^r \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial p_i} \dot{p}_i(t) \quad (240)$$

a pro zrychlení máme

$$\ddot{\mathbf{q}}_j = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 \mathbf{q}_j}{\partial p_j \partial p_i} \dot{p}_i(t) \dot{p}_j(t) + \sum_{i=1}^r \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial p_i} \ddot{p}_i(t), \quad (241)$$

kde p_i, p_j jsou proměnné veličiny v parametrech q_j .

Pro vlastní výpočet zvolíme z časového intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ požadované časy a z rov. (239), (240) a (241) určíme příslušné vektory $\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \ddot{\mathbf{q}}_j$ a dosadíme do rov. (237), (238) a do rovnice pro zrychlení, kterou jsme pro úsporu místa nevytvořili. Počet časových okamžiků musí odpovídat počtu hledaných oprav $\Delta \rho$. Po provedení výpočtu dostaneme vektor oprav $\Delta \rho$. Protože jsme při přechodu z rov. (236) na rov. (237) provedli linearizaci a zanedbali členy s mocninami vyšších řádů, nedosáhneme přesné splnění rov. (237) a postup je nutné opakovat. Pro n -tý iterační krok platí

$$\rho^{(n)} = \rho^{(n-1)} + \Delta \rho^{(n-1)}. \quad (242)$$

Výpočet ukončíme v okamžiku, kdy je splněna podmínka $|\Delta \rho^{(n-1)}| < \varepsilon$, kde ε je zvolená přípustná difference.

5.3 Kinematická metoda

Jak bylo řečeno v úvodu kapitoly 5 je kinematická metoda vhodná pro lokální syntézu, při které požadujeme splnění požadovaných kinematických veličin ve vybraných poloze mechanismu. Je samozřejmé, že se nemusí jednat pouze o jednu polohu na uvažovaném časovém úseku, ale tím se nyní nebudeme v této úvodní části zabývat. Při výkladu kinematické metody navážeme na poznatky ze základního kurzu mechaniky, které rozšíříme o nezbytné úvodní znalosti z teorie vytváření geometrických křivek a jejich obálek. V našem výkladu vynecháme vytváření ploch a jim příslušné spoluzabírající a obalové plochy, které jsou velmi důležité v teorii ozubených kol.

5.3.1 Střed y křivosti trajektorií a obálek

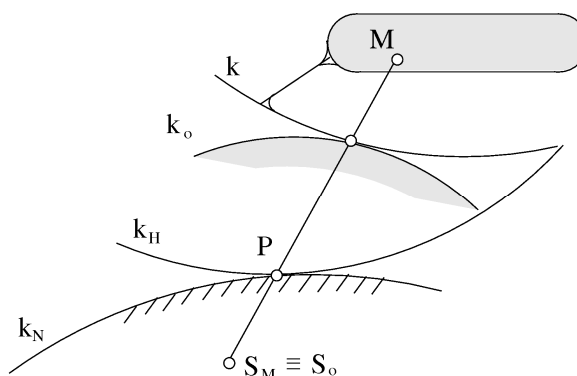
Pojem trajektorie, neboli dráha bodu je běžně známý. Pojmem obálka křivky rozumíme, obr. 77, křivku k_o , která vznikne jako obálka jisté, výtvarné, křivky k při jejím pohybu v dané rovině. Stejná úvaha platí i pro plochu a její obálku, ale tím se zabývat nebudeme. Určování středů křivosti křivek, které vznikají jako trajektorie bodů a jejich obálek, je v inženýrské praxi významné jak z hlediska oskulace křivek, tak i z hlediska určování normálových složek zrychlení bodů těles. Z geometrie víme, že poloměr křivosti R rovinné křivky dané explicitním vztahem $y = y(x)$ můžeme určit použitím vzorce z diferenciální geometrie

$$R = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{|y''|}$$
. Podmínkou použití tohoto vztahu je, že známe rovnici křivky, tedy rovnici

trajektorie, uvažovaného bodu. Tak tomu ale v řadě případů není. Použitím kinematiky můžeme střed y křivosti rovinných křivek určit nejen bez znalosti trajektorie, ale také mnohem rychleji a hlavně snadněji. Střed y křivosti můžeme určovat analyticky, tj. poččetně, nebo graficky. Podobně jako jinde i zde platí, že grafické metody jsou méně přesné, ale jejich velkou výhodou je rychlost a jednoduchost s jakou dosáhneme výsledku. Pro analytické řešení použijeme větu **Euler-Savaryho** a grafické řešení provedeme pomocí **rychlostní konstrukce** nebo pomocí **Bobillierovy konstrukce**. Ještě si připomeneme, že pohyb tělesa konajícího obecný rovinný pohyb můžeme nahradit, obr. 77, valením hybné polodie k_H po nehybné polodie k_N . Dále zavedeme pojem *pár přidružených bodů*, který bude pro další výklad užitečný. Tímto pojmem označujeme bod tělesa a jeho střed křivosti. Na obr. 77 je to M a S_M . Dalším důležitým pojmem, který nám umožňuje určit střed křivosti obálky k_o , obr. 77, vytvořené pohybem výtvarné křivky k je **obálková věta**:

Střed křivosti S_0 obálky k_o křivky k je totožný se středem křivosti S_M trajektorie bodu M , který je středem křivosti výtvarné křivky k .

Z obrázku je zřejmé, že výtvarná křivka k je pevně spojena s hybnou polodií k_H . Obálková věta má mimořádný význam v teorii ozubených kol.



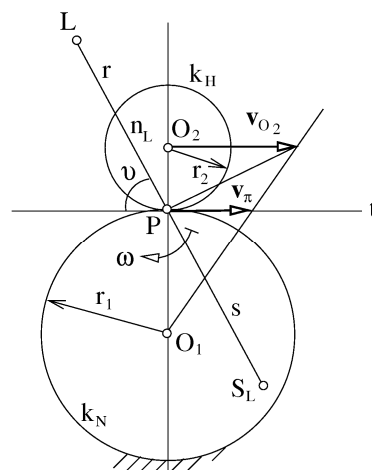
Obr. 77 Obálková věta

Věta Euler – Savaryho

Věta Euler – Savaryho je dána následujícím vztahem

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) \sin \vartheta = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad (243)$$

kde, obr. 78, r je vzdálenost bodu L od pólu P , s je vzdálenost středu křivosti S_L bodu L od pólu, ϑ je úhel který svírá normála bodu L s tečnou t k polodiím a r_1 a r_2 jsou poloměry nehybné a hybné polodie.

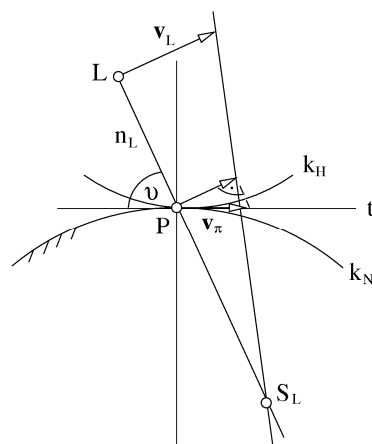


Obr. 78 Věta Euler - Savary

Rychlostní konstrukce

Základem rychlostní konstrukce, kterou určujeme středy křivosti graficky, je **Hartmanova věta**:

Koncový bod vektoru rychlosti libovolného bodu tělesa L , jeho střed křivosti S_L a koncový bod pravoúhlého průmětu pólové rychlosti v_π do směru kolmého na normálu bodu L , leží na jedné přímce.

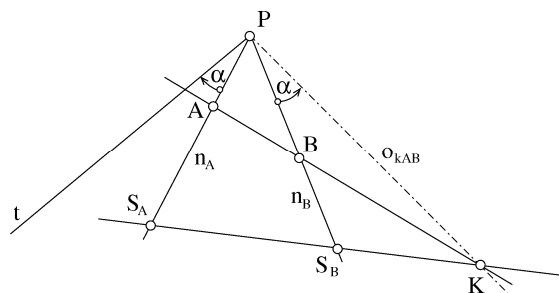


Obr. 79 Hartmanova věta

Bobillierova konstrukce

Bobillierova grafická konstrukce je založena na následující větě.

Pro libovolné dvě normály n_A, n_B existuje osa kolineace o_{kAB} , pro jejíž body platí, že se v nich protínají spojnice bodů ležících na obou normálách a spojnice jejich středů křivosti. Osa kolineace svírá s normálou jednoho bodu stejný ale opačně orientovaný úhel jako svírá tečna t k polodiím s normálou druhého bodu.



Obr. 80 Bobillierova konstrukce

Použití uvedených metod si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 15

Určete střed křivosti bodu L k pevně spojeného s kružnicí k_H , která se valí po kružnici k_N , jestliže je dáno r_1, r_2, m . Situace je znázorněna na obr. 81. Řešení provedeme početně a graficky.

Početně pomocí věty Euler – Savaryho

$$\frac{1}{2r_2 + m} + \frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad (244)$$

odkud je

$$s = \frac{1}{\frac{1}{2r_2 + m} - \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}. \quad (245)$$

Graficky rychlostní konstrukcí

- Zvolíme rychlost bodu O_2 , neboť jeho střed křivosti známe,
- Určíme v_π, v_L ,
- Průsečnice spojnice koncových bodů rychlostí v_L a v_π s normálou n_L je hledaný střed křivosti.

Poznámka:

Rychlostní konstrukci používáme zejména pro body ležící na hlavní normále.

Příklad 16

Určete střed křivosti obálky k_o vytvářené přímkou p , obr. 82, při valení přímky q po kružnici k_N , jestliže je dáno r, α . Řešení provedeme početně a graficky.

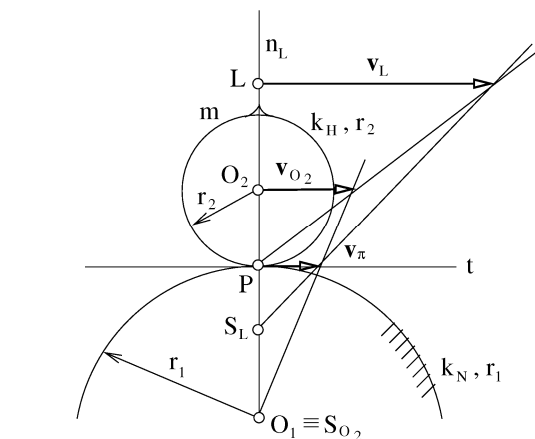
Početně větou Euler – Savaryho

Použitím rov. (243) dostaneme

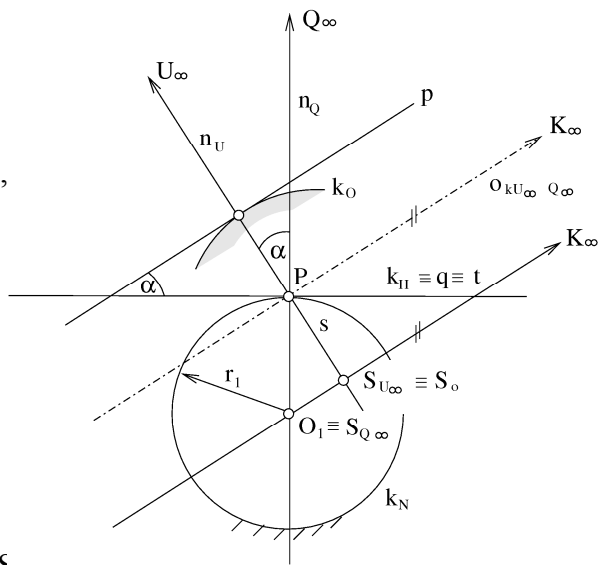
$$\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\infty},$$

odkud je

$$s = r_1 \cos \alpha. \quad (247)$$



Obr. 81 Střed křivosti trajektorie bodu L



Obr. 82 Střed křivosti obálky k_o vytvářené přímkou p

Graficky Bobillierovou konstrukcí

Postupovat budeme následovně:

- přímka q má střed křivosti v nekonečnu, bod Q_∞ , který s tímto středem splývá, má střed křivosti v bodě O_1 ,
- střed křivosti výtvarné přímky p je v nekonečnu a splývá s bodem U_∞ ,
- tečna k polodiím splývá s valivou přímkou q a s hybnou polodií k_H a je kolmá na normálu bodu Q_∞ ,
- podle Bobillierovy věty musí být proto osa kolineace bodů Q_∞ , U_∞ kolmá na normálu bodu U_∞ ,
- průsečík spojnice bodů U_∞ , Q_∞ protne osu kolineace v jejím úběžném bodu K_∞ ,
- spojnice úběžného bodu K_∞ a bodu S_{Q_∞} s normálou bodu U_∞ je hledaný střed křivosti obálky k_O .

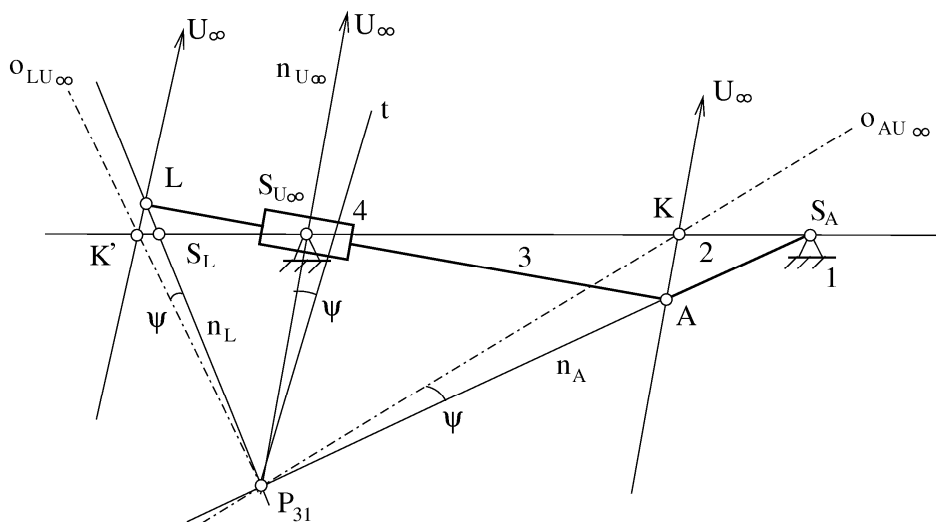
Poznámka:

Jedná se o princip výroby čelních evolventních ozubených kol odvalovacím způsobem.

Příklad 17

Určete střed křivosti trajektorie bodu L členu 3 mechanismu nakresleného na obr. 83. Řešení proved'te graficky.

Mechanismus se nachází v obecné poloze a bod L neleží na hlavní normále. K řešení proto použijeme Bobillierovu konstrukci. Řešení proved'te samostatně a zkontrolujte s obr. 83.



Obr. 83 Střed křivosti trajektorie bodu L

5.3.2 Závěsná zařízení kol automobilů

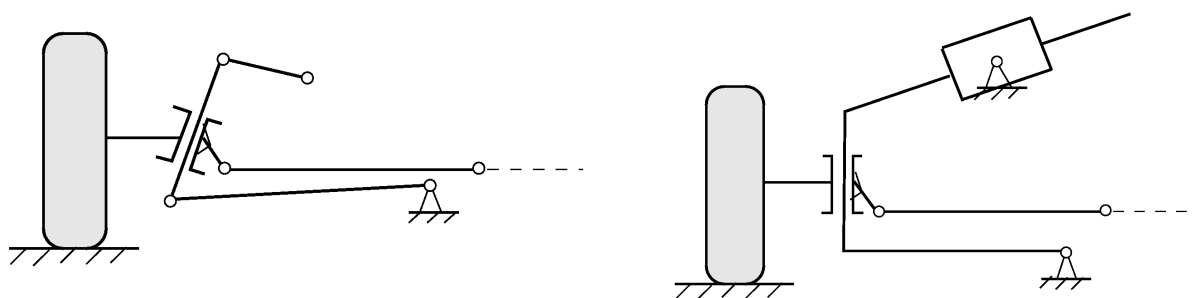
Pomocí kinematické metody chceme provést syntézu řídicího ústrojí předního nezávisle zavěšeného kola automobilu. Nezbytným předpokladem je provedení syntézy zavěšení kola a proto se stručně zmíníme o způsobech uložení automobilových kol. Kola mohou být k rámu vozidla [2] připojena buď jednotlivě prostřednictvím samostatného závěsu, nebo po dvou

prostřednictvím nápravy. Podle toho, zda se kola na jedné nápravě při natáčení vzájemně ovlivňují či nikoliv rozdělujeme zavěšení na nezávislé, závislé a polozávislé. Polozávislým zavěšením se zabývat nebudeme a rovněž se budeme v dalším výkladu zabývat pouze kinematicky určitým zavěšením. Ukážeme si kinematická schémata některých typických způsobů zavěšení.

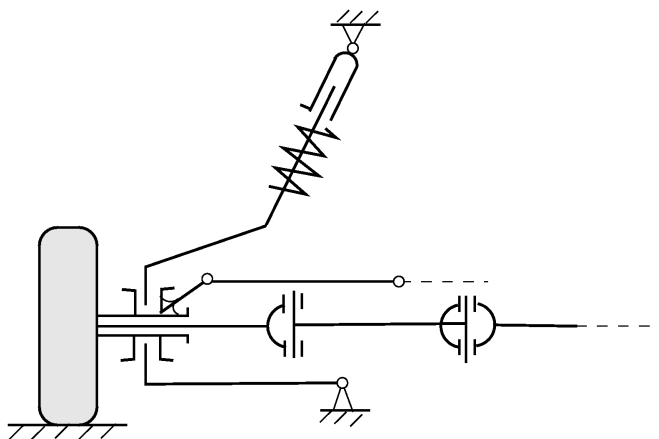
5.3.2.1 Nezávislá zavěšení

Mechanismus nezávislého zavěšení neřízených kol má jeden stupeň volnosti a u řízených kol má dva stupně volnosti. Zavěšení může být provedeno rovinným nebo prostorovým mechanismem. Velmi často se používá zavěšení lichoběžníkové a zavěšení na teleskopické vzpěře nazývané zavěšení Mc Pherson, které jsou v rovinné verzi uvedené na obr. 84.

Rovinné uspořádání



Lichoběžníkové zavěšení

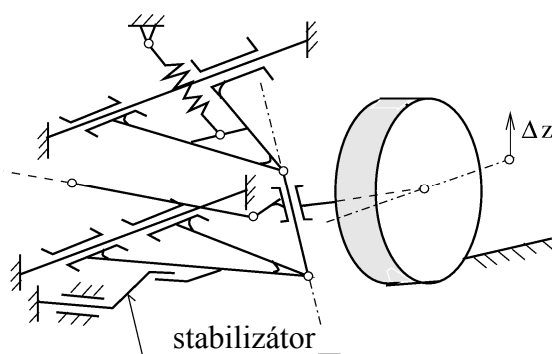
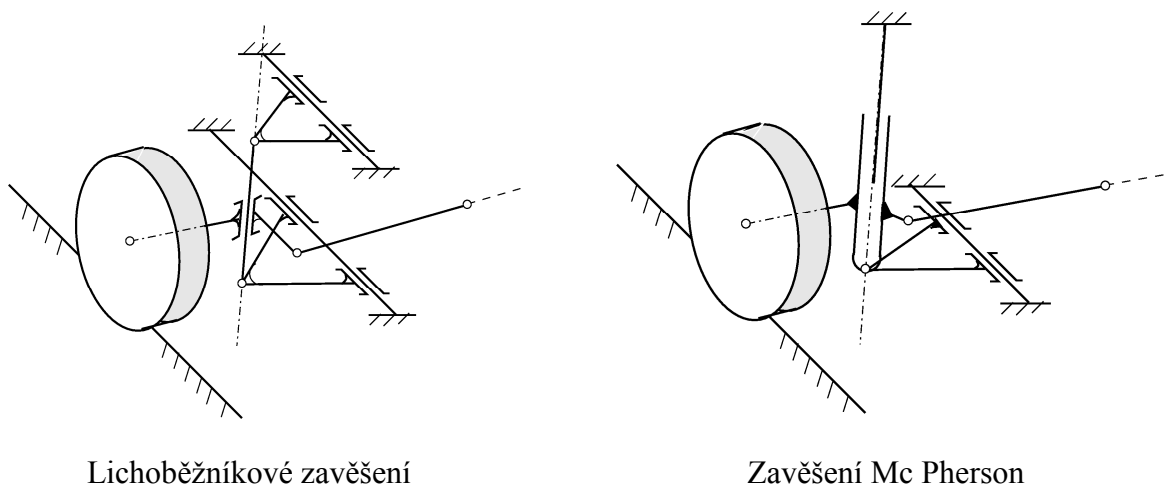


Obr. 84 Rovinné závěsné mechanismy

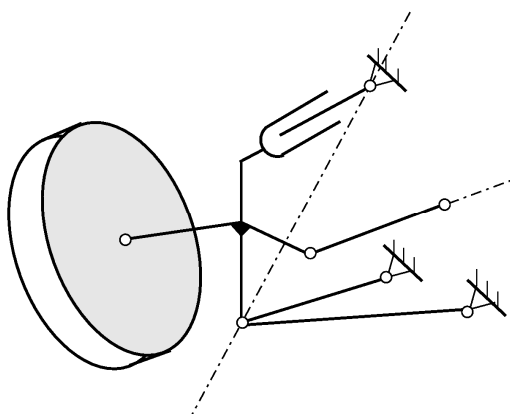
Prostorové uspořádání

Prostorový závěsný mechanismus umožňuje lepší splnění požadavků kladených na zavěšení kola a řídicí ústrojí, neboť má větší počet parametrů. Nevýhodou je komplikovanost a obtížnost kinematického řešení. Na obr. 85 jsou kinematická schémata lichoběžníkového zavěšení a zavěšení Mc Pherson. V dolní části obrázku je případ prostorového lichoběžníkového zavěšení kola se stabilizátorem a pružinou. U prostorových závěsných mechanismů se místo rotačních kinematických dvojic vyskytují sférické dvojice se třemi

stupni volnosti. Na obr. 86 je kinematické schéma zavěšení s teleskopickou vzpěrou se sférickými dvojicemi. Rovinné uspořádání lichoběžníkového zavěšení je průmětem prostorového uspořádání do roviny kolmé na podélnou osu vozidla.

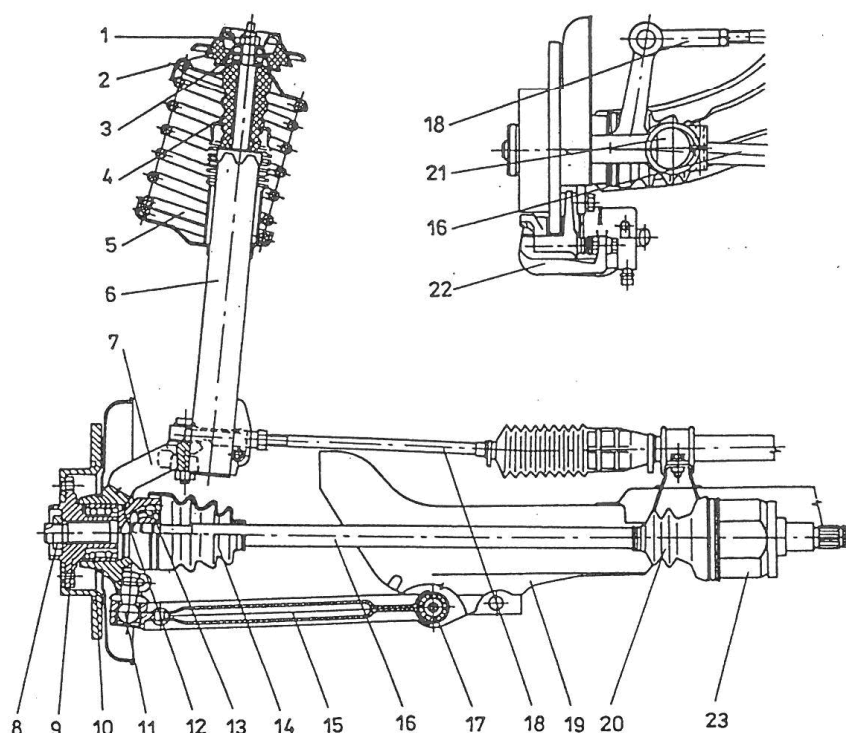


Obr. 85 Prostorové závěsné mechanismy



Obr. 86 Prostorový závěsný mechanismus se sférickými dvojicemi

Konstrukční provedení nezávislého zavěšení Mc Pherson předního kola u osobního automobilu Škoda Favorit 136L s řídícím mechanismem je ukázáno na obr. 84. Přenos rotačního pohybu na kolo je zajištěn pomocí homokinetického kloubu.



- 1,2,3 – uchycení pístnice tlumiče na karoserii
- 4 – přídatná progresivní pružina z polyuretanu
- 5 – pružina
- 6 – tlumič
- 7 – nosič kola
- 8,9,10 – matice a náboj kola, ložisko
- 11 – kulový čep příčného ramene
- 12,13,14,21 – kuličkový kloub
- 15,17 – spodní trojúhelníkové rameno
- 16 – kloubový hnací hřídel
- 18 – řídící tyč
- 19 – nápravnice
- 20,23 – kloub Tripode
- 22 – třmen brzdy

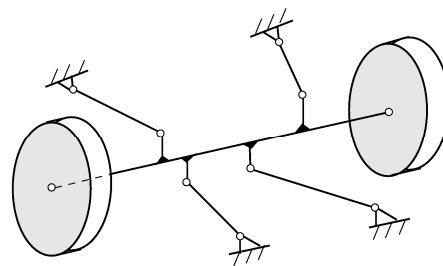
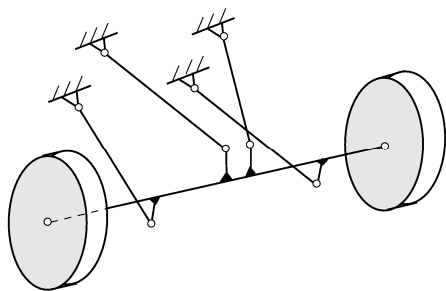
Obr. 87 Přední polonáprava Mc. Pherson s hancím hřídelem

5.3.2.2 Závislá zavěšení

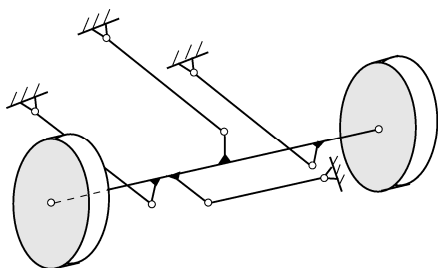
U závislého zavěšení kol jsou nosiče obou kol spolu vázány tuhým tělesem nazývaným mostem zavěšení. Toto zavěšení se běžně nazývá tuhá, nebo také nedělená náprava. Závislé zavěšení musí z kinematického hlediska umožnit:

- pohyb mostu ve svislém směru,

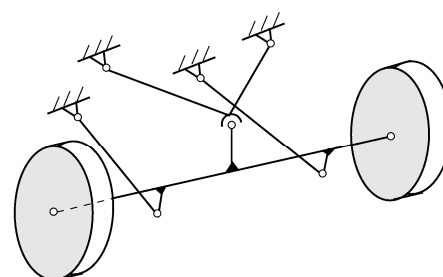
- natočení mostu kolem osy rovnoběžné s podélnou osou vozidla,



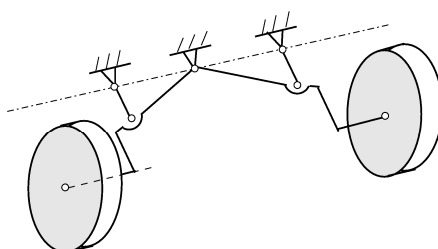
Základní případy čtyřbodového zavěšení



Čtyřbodové zavěšení s Panhardskou tyčí, která zajišťuje přímé vedení



Zavěšení s trojúhelníkovým ramenem



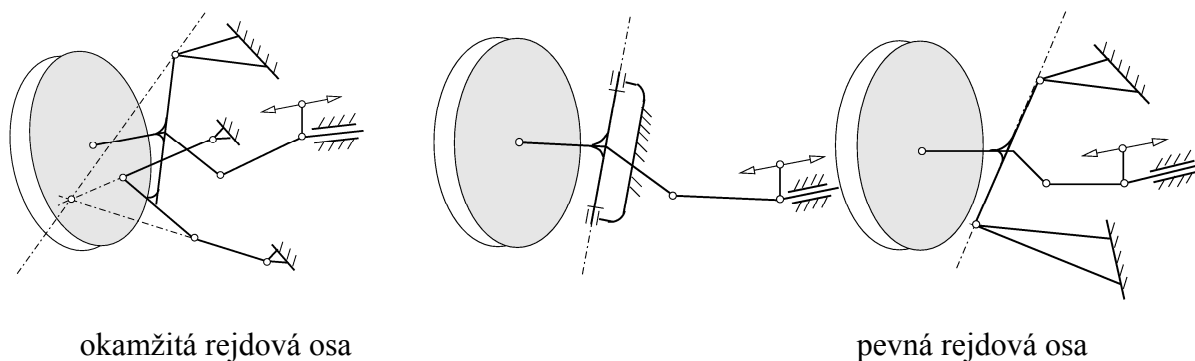
Kinematicky přeurčené zavěšení

Obr. 88 Závislé zavěšení kol

takže má dva stupně volnosti. Závislé zavěšení tvoří vždy prostorový mechanismus. Základní případy závislého zavěšení kol jsou uvedeny na obr. 88, kde první čtyři případy jsou kinematicky určité a na posledním pátém nákrese je zavěšení kinematicky přeurčené, při kterém jsou požadované pohyby mostu vždy doprovázeny deformacemi v úložných místech.

5.3.2.3 Rejdivá osa

Vrátíme se nyní zpět k nezávislému zavěšení řízeného předního kola, které se při změně směru jízdy otáčí kolem jisté osy, kterou nazýváme **rejdivá osa**. Tato osa, obr. 89, je buď okamžitá, nebo pevná. Po usnadnění jízdy vozidla v přímém směru, zejména při vyšších rychlostech je nutné, aby řízená kola měla sama tendenci setrvávat v poloze pro přímý směr jízdy. Dále je potřebné, aby se kola po projetí zatáčky sama vracela do neutrální polohy a rovněž se požaduje, aby se kola vracela samočinně do neutrální polohy po vychýlení



Obr. 89 Řízené kolo

nahodilými bočními silami. Těchto účinků se dosahuje polohou rejdové osy, která je realizována **rejdovým čepem**, nebo též jinak nazývaným **čepem nápravy**. Poloha rejdové osy, obr. 90, je určena:

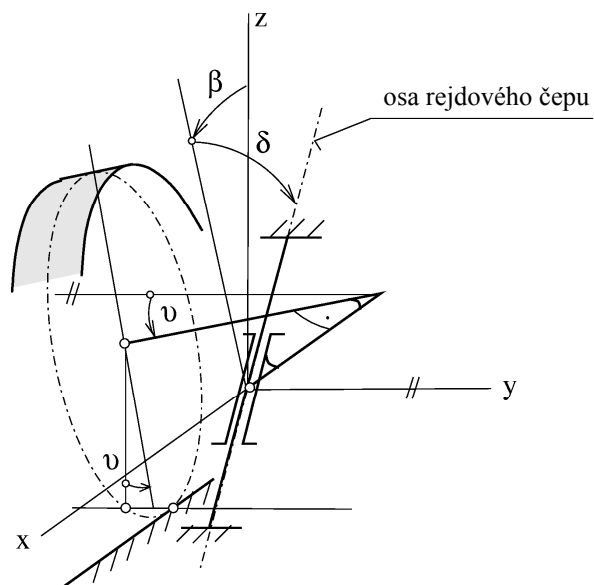
- úhlem záklonu β ,
- úhlem příklonu δ ,
- úhlem odklonu kola ϑ .

Zajímavé je zjištění, že řízené kolo při přímé jízdě automobilu nekoná klidný rotační pohyb kolem své osy otáčení, nýbrž se natáčí kolem rejdové osy

- vlivem řidiče s frekvencí $0 \div 75$ Hz,
- vlivem pérování s frekvencí $1 \div 25$ Hz a $7 \div 14$ Hz,
- vlivem kmitání s frekvencí $5 \div 14$ Hz.

Již při frekvenci 0,1 Hz dochází k fázovému posuvu mezi vstupní výchylkou a vývinem silových účinků, takže řízené kolo se při pohybu nachází v **nestacionárním stavu**.

Nyní se budeme zabývat podrobněji jednotlivými úhly, které určují polohu osy rejdového čepu.



Obr. 90 Poloha rejdové osy

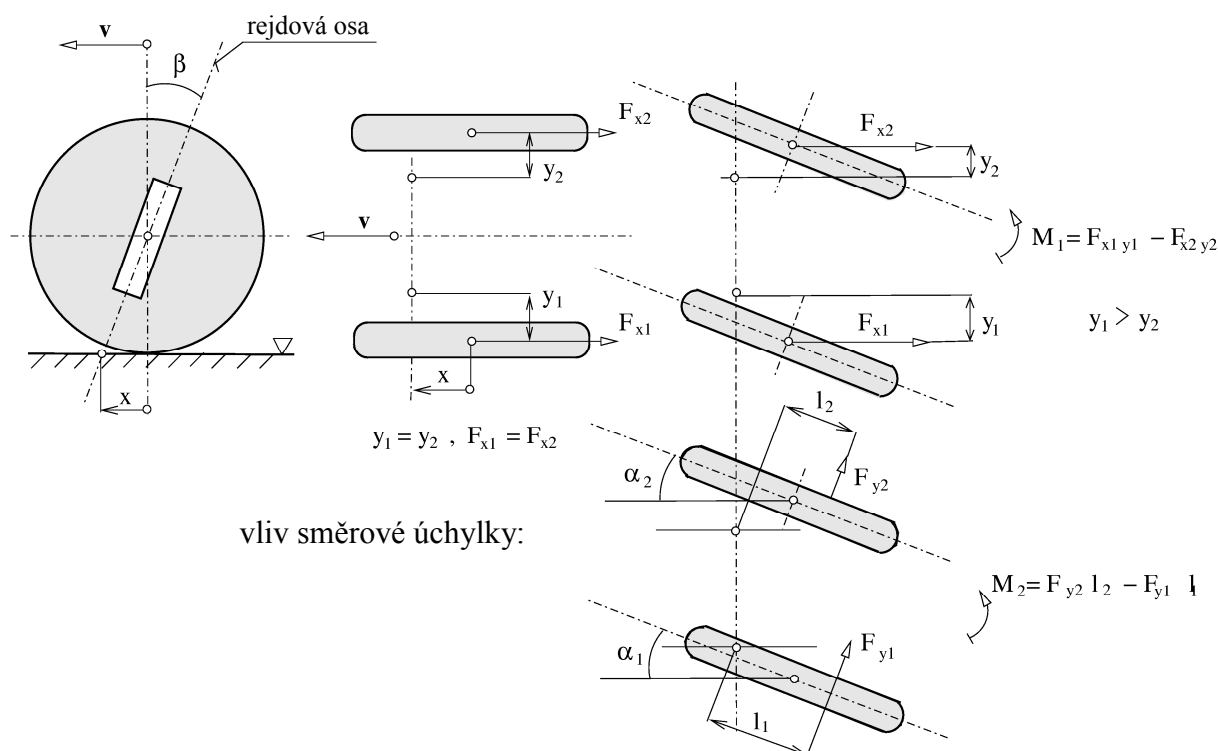
Záklon čepu nápravy

Stabilizační účinek záklonu čepu nápravy β spočívá [5] při vychýlení kol z přímého směru, obr. 91, ve vzniku různě velkých momentů od sil valivého odporu, takže vzniklý moment M_1 vrací kola do přímého směru. Další stabilizační účinek spočívá při působení bočních sil u kol odvalujících se se směrovými úchylkami α_1, α_2 ve zvýšení vratného momentu vyvolaného momenty bočních sil F_{y1}, F_{y2} na ramenech l_1, l_2 . Vratný moment se tedy skládá ze dvou momentů M_1 a M_2

$$M_1 = F_{x1} y_1 - F_{x2} y_2 ,$$

$$M_2 = F_{y2} l_2 + F_{y1} l_1 . \quad (244)$$

Obvykle se volí $\beta \leq 2^\circ$.



Obr. 91 Záklon rejdové osy

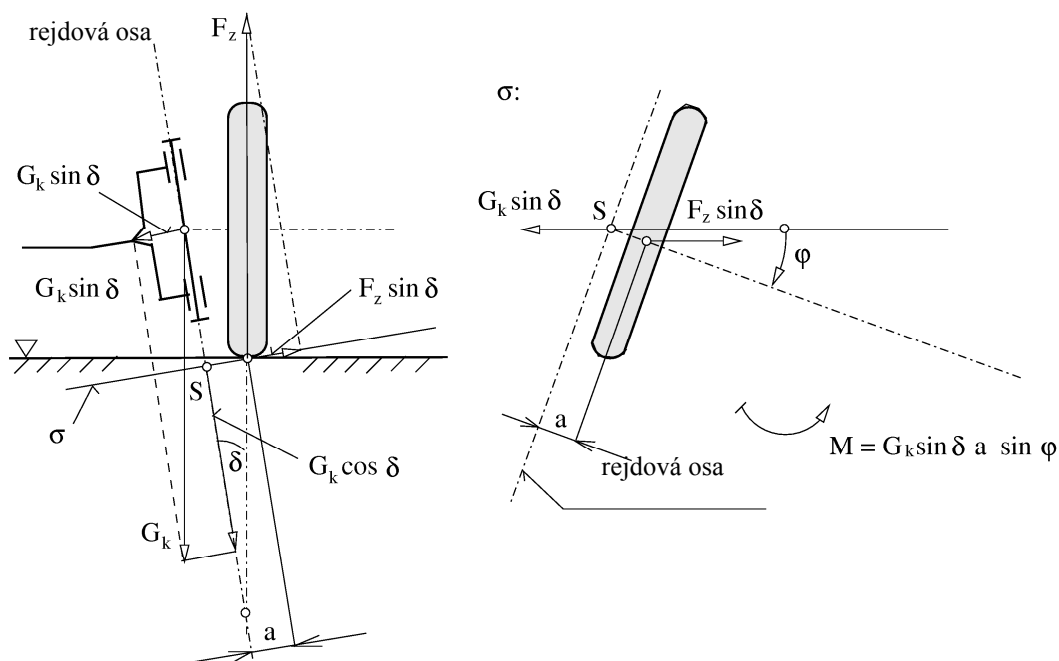
U vozidel s pohonem předních kol, kde síla F_x má opačný smysl $F_x = F_k - O_f$, kde F_k je hnací síla a O_f odpor valení, viz kap. 2.2, je situace jiná, neboť síla F_x by měla účinek destabilizační. Provádí se proto nulový, nebo záporný záklon.

Příklon čepu nápravy

Příklon čepu nápravy δ je hlavní opatření, kterým se dosahuje automatického vracení kol do polohy pro přímou jízdu. Stabilizace je vyvolána tíhovým zatížením přední nápravy, obr. 89. Při natáčení kola se styčná plocha kola s vozovkou pohybuje v rovině σ a dochází k výškové změně přední části vozidla. Velikost vratného momentu M , pro který platí vztah

$$M = G_k \sin \delta a \sin \varphi , \quad (245)$$

kde G_k je tíhová síla připadající na kolo, kterým jsou kola vrácena do přímého směru, závisí vedle úhlu příklonu δ i na vzdálenosti a stopníku S rejdové osy v rovině σ od středu kola. Obvykle je $\delta = 5 \div 8$.



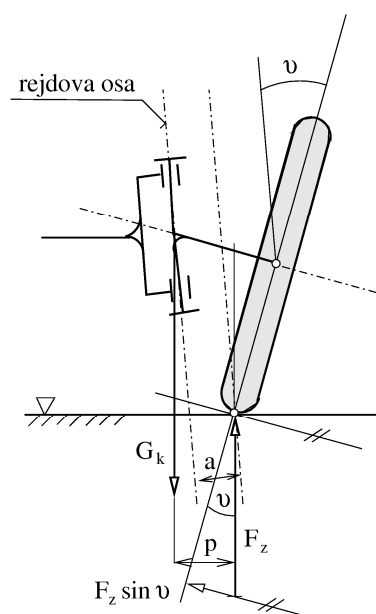
Obr. 92 Příklon rejdové osy

Odklon kola

Odklon kola ϑ má příznivý vliv z konstrukčního hlediska. Malá síla $F_z \sin \vartheta$ zatěžuje trvale osově ložisko, což přispívá k jeho klidnému chodu a zvyšuje bezpečnost axiálního jištění. Dále dochází ke zmenšení vzdálenosti p mezi radiální reakcí vozovky F_z a místem vetknutí čepu kola do třmenu, které je nejvíce namáháno. Obvykle se volí $\vartheta \leq 1^\circ 30'$, případně 0° nebo $i < 0^\circ$ pro případ, že je třeba zvýšit schopnost kol přenášet boční sílu.

Poznámka

Kromě polohy rejdové osy se pro docílení stability řízených kol provádí jejich natočení kolem rejdových čepů o úhel cca $\kappa = 20 \div 40'$ tak, že vzdálenost předních okrajů ráfků disků obou kol je menší než zadních okrajů. Tím vzniknou na kolech malé boční síly, které se snaží natočit kola do přímého směru a jejich momenty vzhledem k rejdovým osám vyvolají v mechanismu řízení trvalé napětí, kterým se vymezí všechny případné vůle a zabránuje se rozkmitání kol kolem rejdových čepů.



Obr. 93 Odklon kola

Příklad 19

Jako příklad nezávislého zavěšení kol si ukážeme zavěšení kol přední a zadní nápravy u automobilu Honda Integra R1.8 Vti. U obou kol je nezávislé zavěšení řešeno prostorovým mechanismem, obr. 94, jehož počet stupňů volnosti je uveden na obrázcích, kde „s“ značí sférickou kinematickou dvojici, „p“ posuvnou a „r“ rotační kinematickou dvojici, „n“ je počet členů soustavy. Parazitní rotací je rozuměna rotace příslušných členů kolem svých os, která nemá vliv na pohyblivost soustavy a z kinematického hlediska je bezvýznamná.



Honda Integra

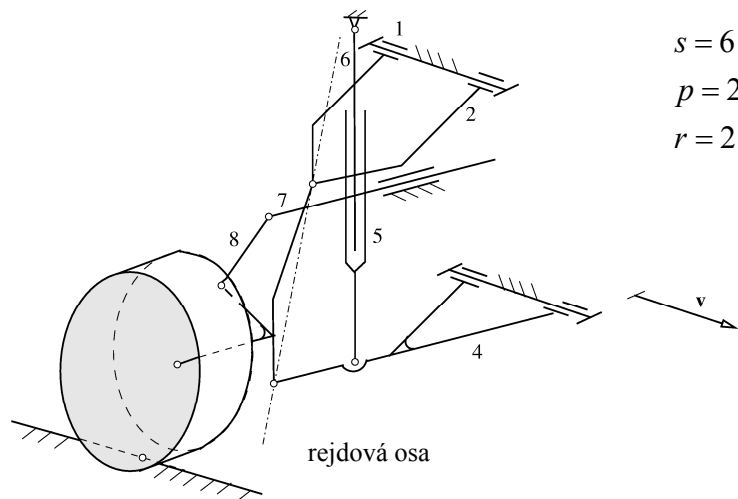
Přední náprava:

$$i = 6(8-1) - 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 - 5 \cdot 2 = 42 - 38 = 4^\circ$$

6, 8 – parazitní rotace

Počet stupňů volnosti

$$i = 2^\circ$$



$$s = 6$$

$$p = 2$$

$$r = 2$$

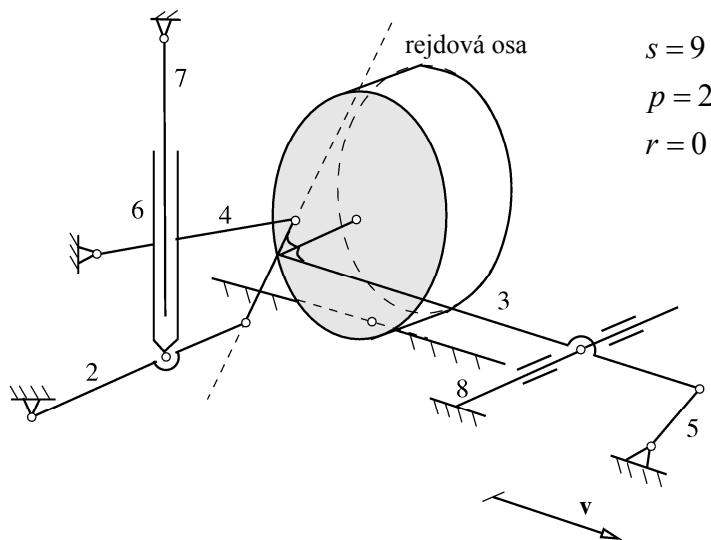
Zadní náprava:

$$i = 6(8-1) - 3 \cdot 9 - 5 \cdot 2 = 5^\circ$$

7, 2, 4, 5 – parazitní rotace

Počet stupňů volnosti

$$i = 1^\circ$$



$$s = 9$$

$$p = 2$$

$$r = 0$$

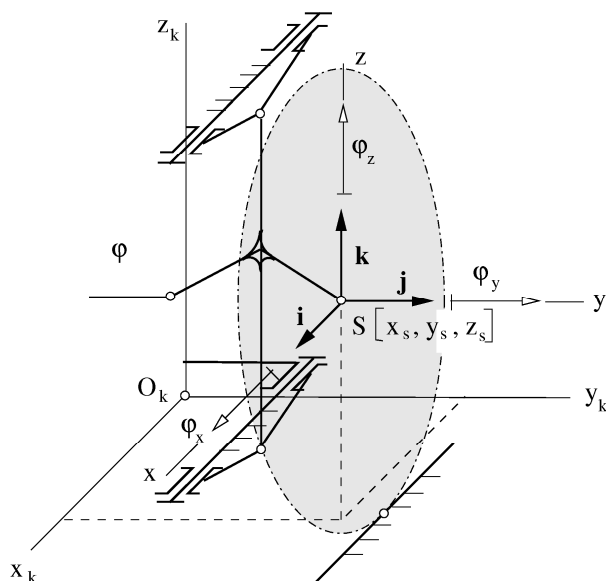
Obr. 94 Zavěšení kol přední a zadní nápravy u automobilu Honda Integra

5.3.3 Syntéza zavěšení předního kola automobilu

V předcházejících kapitolách jsme se zmínili, že při změně polohy kola dojde ke změně poloh všech členů závěsného mechanismu. Hovoříme-li o změně polohy kola, máme zde na mysli změnu vzniklou propérováním kola, která je dána změnou vertikální souřadnice z_s . Závislosti souřadnic polohy kola, obr. 95, na souřadnici z_s můžeme schematicky vyjádřit takto:

$$x_s = x_s(z_s), \quad \varphi_x = \varphi_x(z_s), \quad y_s = y_s(z_s), \quad \varphi_y = \varphi_y(z_s), \quad z_s, \quad \varphi_z = \varphi_z(z_s), \quad (246)$$

kde O_k je původní a S je nová poloha středu kola. Cílem syntézy je navrhnout místa uložení mechanismu zavěšení kola na karoserii automobilu tak, aby kolo konalo relativní pohyb vůči karoserii odpovídající požadovaným kinematickým charakteristikám.



Obr. 95 Změna polohy kola

Základními **kinematickými charakteristikami** zavěšení kol a řízení rozumíme závislosti uvedené v rov.(246), vztažené případně na dotkový bod kola s vozovkou a dále změny úhlů určujících polohu rejdové osy ve zvoleném souřadnicovém systému v závislosti na propérování určeném změnou souřadnice z_s .

Syntézu provedeme [3] pro jednu vybranou polohu zavěšení řízeného nezávisle zavěšeného předního kola vozidla, obr. 95, které je zablokováno. Ve středu kola S zavedeme souřadnicový systém $R \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, jehož osa x je rovnoběžná s podélnou osou vozidla. Při propérování kola určeném změnou souřadnice z_s dojde ke změně souřadnic x_s, y_s a k natočení nosiče kola vyjádřenému změnou úhlů $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$. Pro zjednodušení dalšího řešení zavedeme zobecněnou souřadnici q_i . Po jejím zavedení zapíšeme soustavu (246) ve tvaru

$$q_i = q_i(z_s), \quad i = 1 \div 5. \quad (247)$$

Rozvedením vztahu (247) do Mc Laurinovy řady v okolí bodu $z_s = z_{s0} = 0$, jedná se o Taylorovu řadu pro bod 0, s tím, že zanedbáme členy třetího a vyšších řádů, dostaneme pro $q_i(z_{s0}) = q_{i0}$

$$q_i = q_{io} + \frac{q'_{io}}{1}(z_s - z_{so}) + \frac{q''_{io}}{2}(z_s - z_{so})^2. \quad (248)$$

Změny funkčních hodnot a jejich derivace $\frac{dq_i}{dz_s} = q'_i$ jsou

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= q_i - q_{io} = q'_{io} z_s + \frac{1}{2} q''_{io} z_s^2, \\ \Delta q'_i &= q'_{io} + q''_{io} z_s, \\ \Delta q''_i &= q''_{io}. \end{aligned} \quad (249)$$

Pro zdůraznění skutečnosti, že se jedná o hodnoty ve vybraném bodě, provedeme přeznačení

$$q'_{io} = \kappa_{i1}, \quad q''_{io} = \kappa_{i2} \quad (250)$$

a přepíšeme rov. (249)

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= \kappa_{i1} z_s + \frac{1}{2} \kappa_{i2} z_s^2, \\ \Delta q'_i &= \kappa_{i1} + \kappa_{i2} z_s, \\ \Delta q''_i &= \kappa_{i2}. \end{aligned} \quad (251)$$

Protože obecně ale je propérování funkcí času, $z_s = z_s(t)$, můžeme první rovnici soustavy (251) vyjadřující změnu zobecněné souřadnice zapsat ve tvaru

$$\Delta q_i = \kappa_{i1} z_s(t) + \frac{1}{2} \kappa_{i2} z_s^2(t). \quad (252)$$

Potom rychlost a zrychlení této změny jsou vyjádřeny vztahy

$$\begin{aligned} \Delta \dot{q}_i &= \kappa_{i1} \dot{z}_s(t) + \kappa_{i2} z_s(t) \dot{z}_s(t), \\ \Delta \ddot{q}_i &= \kappa_{i1} \ddot{z}_s(t) + \kappa_{i2} \dot{z}_s^2(t) + \kappa_{i2} z_s(t) \ddot{z}_s(t). \end{aligned} \quad (253)$$

Poloha kola je ale při zablokovaném řízení funkcí geometrické vazby, tedy změny z_s a nikoli rychlosti \dot{z}_s . Jinými slovy řečeno, kolo může zaujmout změněnou polohu libovolnou rychlostí. Položíme proto $\dot{z}_s = 1$, pak je $\ddot{z}_s = 0$ a pro střed kola ve výchozí poloze, $z_s = 0$, přejdou rov. (252) a (253) na tvar

$$\Delta q_i = 0, \quad \Delta \dot{q}_i = \kappa_{i1}, \quad \Delta \ddot{q}_i = \kappa_{i2}. \quad (254)$$

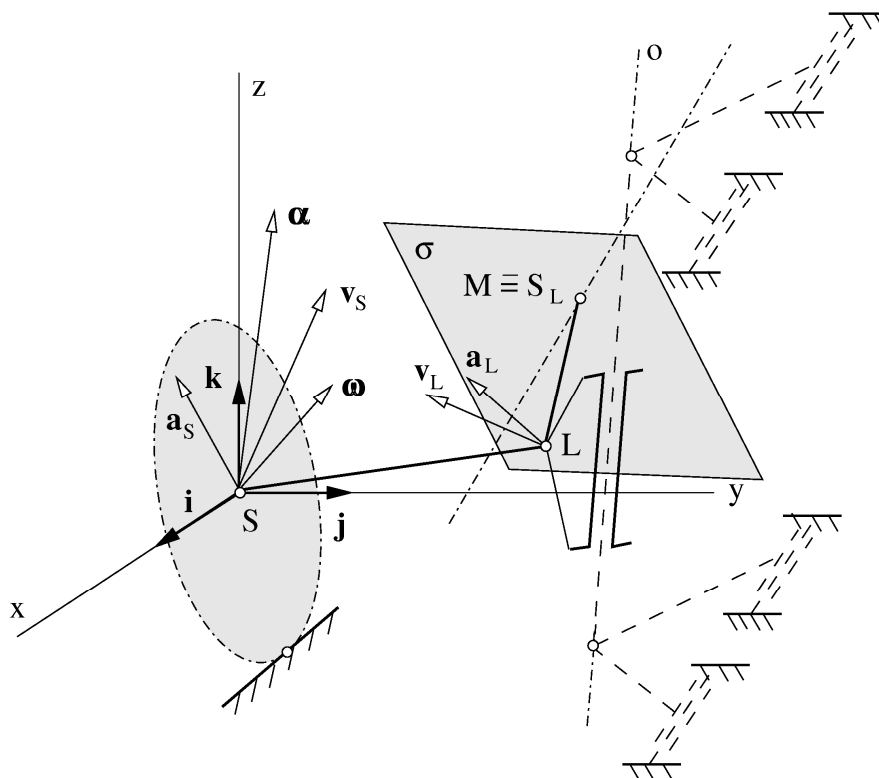
Uvažujme na okamžik, že kolo je uvolněno ze svých vazeb a že může vykonávat obecný prostorový pohyb, který rozložíme na unášivý posuvný pohyb a na druhotný sférický pohyb. Potom je pohybový stav nosiče kola plně určen kinematickými veličinami $\mathbf{v}_S, \mathbf{a}_S, \boldsymbol{\omega}_S, \boldsymbol{\alpha}_S$, které vyjádříme jejich složkami

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_S &= \mathbf{i} v_{Sx} + \mathbf{j} v_{Sy} + \mathbf{k} v_{Sz}, & \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{i} \omega_x + \mathbf{j} \omega_y + \mathbf{k} \omega_z \\ \mathbf{a}_S &= \mathbf{i} a_{Sx} + \mathbf{j} a_{Sy} + \mathbf{k} a_{Sz}, & \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{i} \alpha_x + \mathbf{j} \alpha_y + \mathbf{k} \alpha_z.\end{aligned}\quad (255)$$

Použitím rov.(254) můžeme složky vektorů v rov.(255) vyjádřit následujícím způsobem

$$\begin{aligned}v_{Sx} &= \dot{x}_S = \kappa_{x1}, & a_{Sx} &= \ddot{x}_S = \kappa_{x2}, & \omega_x &= \dot{\phi}_x = \kappa_{\phi_x 1}, & \alpha_x &= \ddot{\phi}_x = \kappa_{\phi_x 2}, \\ v_{Sy} &= \dot{y}_S = \kappa_{y1}, & a_{Sy} &= \ddot{y}_S = \kappa_{y2}, & \omega_y &= \dot{\phi}_y = \kappa_{\phi_y 1}, & \alpha_y &= \ddot{\phi}_y = \kappa_{\phi_y 2}, \\ v_{Sz} &= \dot{z}_S = 1, & a_{Sz} &= \ddot{z}_S = 0, & \omega_z &= \dot{\phi}_z = \kappa_{\phi_z 1}, & \alpha_z &= \ddot{\phi}_z = \kappa_{\phi_z 2}.\end{aligned}\quad (256)$$

Na obr. 96 je naznačeno kinematické schéma nezávislého zavěšení předního kola automobilu. Úkolem syntézy je nalézt bod M , nebo množinu těchto bodů M , ve kterém je nosič kola svým bodem L připojen ke karoserii vozidla, tak, aby připojení pomocí vzpěry LM umožnilo bodu L pohybovat se kinematickými veličinami $\mathbf{v}_L, \mathbf{a}_L$, které odpovídají uvažovanému prostorovému pohybu kola. To umožní středu kola S realizovat jeho přirozený



Obr. 96 Kinematické schéma nezávislého zavěšení předního kola

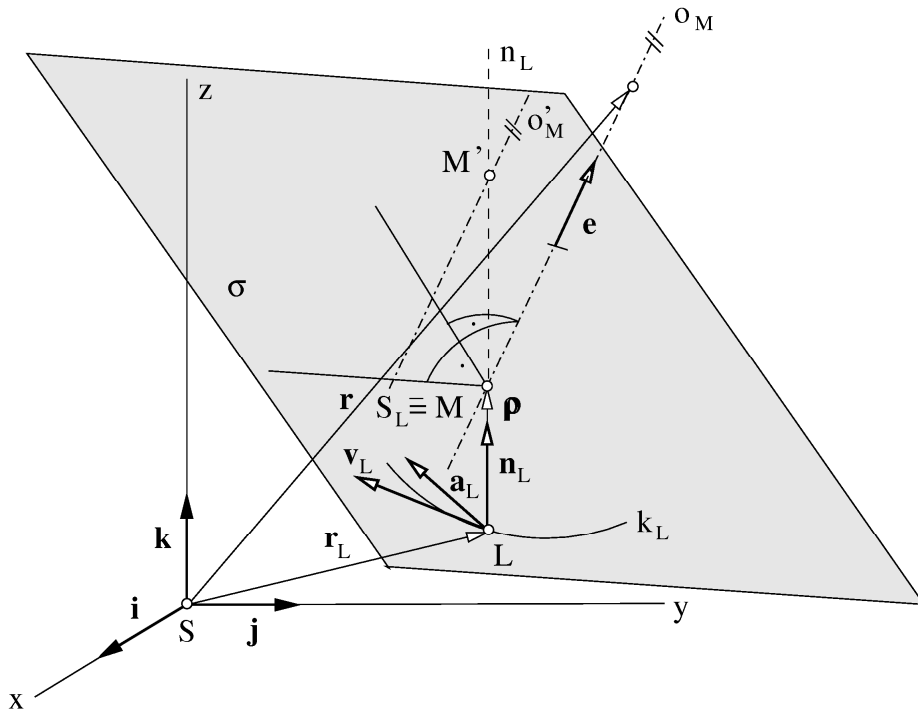
pohyb při propérování vzhledem ke karoserii automobilu. Důsledkem je, že nedojde ke vzniku negativních silových účinků ve vazbách. Vzpěru je nutné realizovat závěsným mechanismem. Řešení provedeme v souřadnicovém systému R , ve kterém je poloha bodu L určena vektorem

$$\mathbf{r}_L = \mathbf{i}x_L + \mathbf{j}y_L + \mathbf{k}z_L \quad (257)$$

a jeho kinematický stav je určen vztahy

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_L$$

$$\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_S + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_L + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_L. \quad (258)$$



Obr. 97 Určení bodu M nosiče kola LM

Geometrické místo takových bodů M , obr. 97, nosiče kola LM , pro které bod L vyhoví rov.(258), je přímka o_M procházející středem křivosti S_L trajektorie bodu L kolmo na rovinu σ proloženou vektory $\mathbf{v}_L, \mathbf{a}_L$. Rovnice přímky o_M je

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_L + \mathbf{n}_L \rho + \mathbf{e} \lambda, \quad (259)$$

kde λ je volitelný parametr a jednotkový vektor přímky o_M je

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}_L \times \mathbf{a}_L}{|\mathbf{v}_L \times \mathbf{a}_L|}. \quad (260)$$

Pro jednotkový vektor normály trajektorie bodu L platí

$$\mathbf{n}_L = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{v}_L}{|\mathbf{e} \times \mathbf{v}_L|}. \quad (261)$$

Poloměr křivosti trajektorie bodu L vyjádříme pomocí normálové složky zrychlení

$$a_{L_n} = \frac{v_L^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v_L^2}{a_{L_n}}, \quad (262)$$

a normálovou složku zrychlení vyjádříme použitím skalárního součinu

$$a_{L_n} = \mathbf{n}_L \cdot \mathbf{a}_L \quad (263)$$

Vektor $\boldsymbol{\rho}$ můžeme potom vyjádřit následovně

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{v_L^2}{a_{L_n}} \mathbf{n}_L = \frac{v_L^2}{\mathbf{n}_L \cdot \mathbf{a}_L} \mathbf{n}_L = \frac{v_L^2}{a_L \cdot \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{v}_L)}{|\mathbf{e} \times \mathbf{v}_L|}} \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{v}_L}{|\mathbf{e} \times \mathbf{v}_L|} = \frac{v_L^2}{\mathbf{a}_L \cdot \frac{\mathbf{v}_L \times \mathbf{a}_L \times \mathbf{v}_L}{|\mathbf{v}_L \times \mathbf{a}_L|}} \frac{\mathbf{v}_L \times \mathbf{a}_L \times \mathbf{v}_L}{|\mathbf{v}_L \times \mathbf{a}_L|} = \quad (264)$$

$$= \frac{v_L^2 (\mathbf{v}_L \times \mathbf{a}_L) \times \mathbf{v}_L}{\mathbf{a}_L [\mathbf{a}_L (\mathbf{v}_L \cdot \mathbf{v}_L) - \mathbf{v}_L (\mathbf{v}_L \cdot \mathbf{a}_L)]} = \frac{v_L^2 (\mathbf{v}_L \times \mathbf{a}_L) \times \mathbf{v}_L}{\mathbf{a}_L^2 v_L^2 - (\mathbf{a}_L \cdot \mathbf{v}_L)^2}$$

Dosazením do rov.(259) dostaneme

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_L + \frac{v_L^2 (\mathbf{v}_L \times \mathbf{a}_L) \times \mathbf{v}_L}{\mathbf{a}_L^2 v_L^2 - (\mathbf{a}_L \cdot \mathbf{v}_L)^2} + \lambda \frac{\mathbf{v}_L \mathbf{a}_L}{|\mathbf{v}_L \times \mathbf{a}_L|} \quad (265)$$

V případě potřeby můžeme použít pouze přibližné splnění podmínek v rov.(258) následovně. Bodem M , obr. 94, hlavní normály n_L vedeme přímkou $o'_M // o_M$, pro kterou můžeme psát rovnici

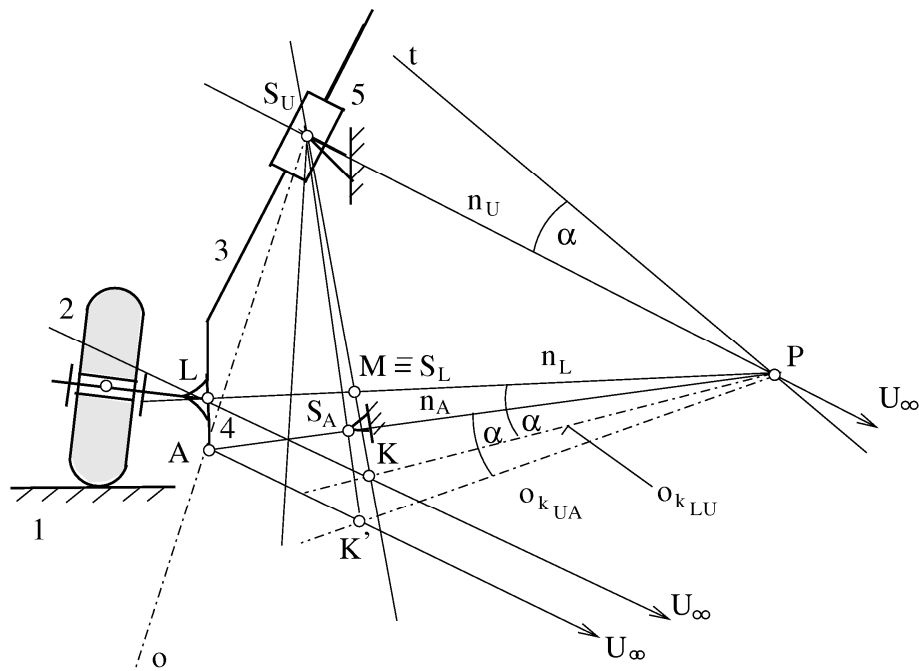
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_L + \boldsymbol{\rho} + \mathbf{n}_L \gamma + \lambda \mathbf{e}, \quad (266)$$

kde γ je volitelný parametr, který splňuje pouze požadavek rychlosti. Této podmínce vyhovuje každý bod roviny σ ležící na normále n_L .

Příklad 20

Uvažujme nyní obr. 98, že zavěšení kola je provedeno teleskopickou vzpěrou, jedná se tedy o zavěšení McPherson a že předchozím řešením jsme určili kinematický stav bodu L nosiče kola a následně i polohu jeho středu křivosti $S_L \equiv M$. Nyní je třeba tento mechanismus zavěšení navrhnout. Použijeme grafické řešení, které nám dá dobrou vizuální představu. K tomuto účelu využijeme Bobillierovu větu uvedenou v kap. 5.3.1, pro jejíž aplikaci máme

k dispozici vypočtenou polohu bodu L a jeho střed křivosti $S_L \equiv M$. Situace je patrná na obr. 98. Zvolíme podle naší potřeby, nebo s ohledem na konstrukci, polohu objímky teleskopické vzpěry 5 a počáteční bod A vzpěry 4. Aplikací Bobillierovy konstrukce určíme uchycení nosiče 4 (bod S_A) na karoserii automobilu následujícím postupem.



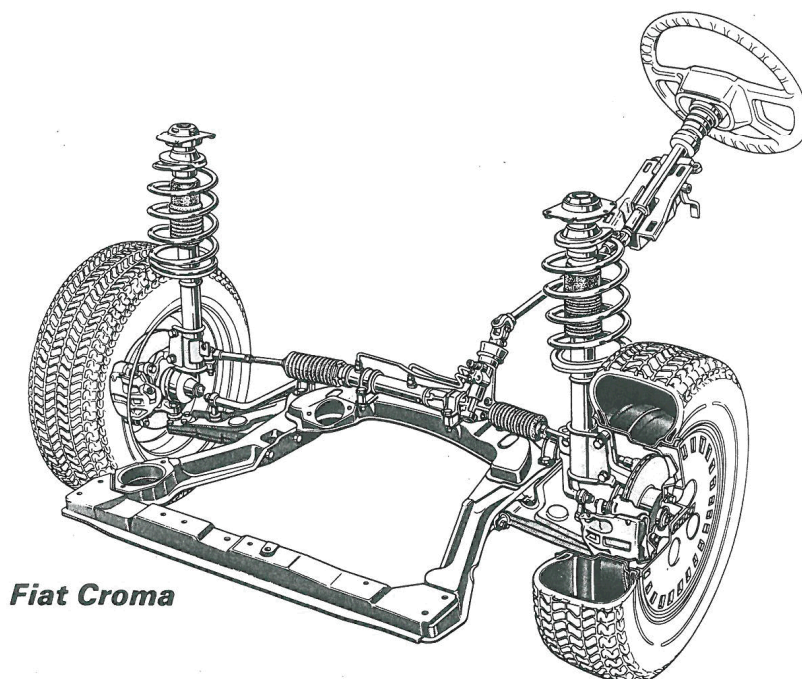
Obr. 98 Návrh zavěšení McPherson

Pomocí dvou párů přidružených bodů (L, S_L) a (U_∞, S_{u_∞}) určíme prostřednictvím normál n_L, n_u pól P a osu kolineace $o_{k_{LU}}$. Pomocí věty Bobillierovy určíme přenesením úhlu α tečnu k polodiím t . Sestrojíme normálu n_A a další aplikací Bobillierovy věty sestrojíme osu kolineace $o_{k_{UA}}$. Průsečík K' této osy kolineace spojíme s bodem S_U a kde tato spojnice protne normálu n_A , leží střed křivosti S_A bodu A , který je hledaným koncovým bodem vzpěry 4.

5.3.4 Syntéza mechanismu řízení

Mechanismus řízení, obr. 99, slouží k přenosu rotačního pohybu volantu na obě přední kola vozidla tak, aby byly dodrženy kinematické charakteristiky řízení, které určují vztah mezi natočením levého a pravého kola. Tento vztah je limitován

- podmínkami Ackermannovými (Jeautaudovými),
- podmínkami paralelního řízení.



Obr. 99 Mechanismus řízení s hydraulickým přenosem rotačního pohybu

Mechanismus řízení převádí natočení hlavní páky řízení φ_m na otočení φ nosiče kola kolem rejdového čepu. Úlohou syntézy je navrhnout mechanismus řízení tak, aby realizoval požadovanou zdvihovou závislost

$$\varphi = \varphi(\varphi_m) \wedge \varphi_m \in \langle \varphi_{m_o}, \varphi_{m_k} \rangle, \quad (267)$$

kde φ je požadované natočení kola a $\varphi_{m_o}, \varphi_{m_k}$ jsou natočení řídicí páky ve výchozí a konečné poloze, které odpovídají maximálnímu rejdu. Mechanismus řízení nerealizuje funkce v rov. (267) přesně v celém intervalu zdvihu. Skutečná zdvihová závislost $\tilde{\varphi}$ realizovaná mechanismem závisí na parametrech mechanismu, takže platí vztah

$$\tilde{\varphi} = \varphi(\varphi_m, a_1, a_2, \dots, a_r), \quad (268)$$

kde $a_i, i=1, 2, \dots, r$ jsou hledané konstrukční parametry. Můžeme je určit [3] např. z podmínky, aby součet kvadrátů odchylek požadované a generované závislosti v n zvolených výpočtových polohách byl s určitou vahou w_{φ_m} co nejmenší

$$S = \sum_{i=1}^n [w(\varphi_m)(\varphi - \tilde{\varphi})^2] \rightarrow \min. \quad (269)$$

Výpočtové polohy rozložíme v intervalu $\varphi_{m_k} - \varphi_{m_o}$ rovnoměrně, takže platí

$$\Delta\varphi_m = \frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{m_o}}{n-1}, \quad \varphi_{m_i} = \varphi_{m_o} + (i-1)\Delta\varphi_m. \quad (270)$$

Váhovou funkcí připisujeme odchylkám v různých výpočtových polohách různý význam.

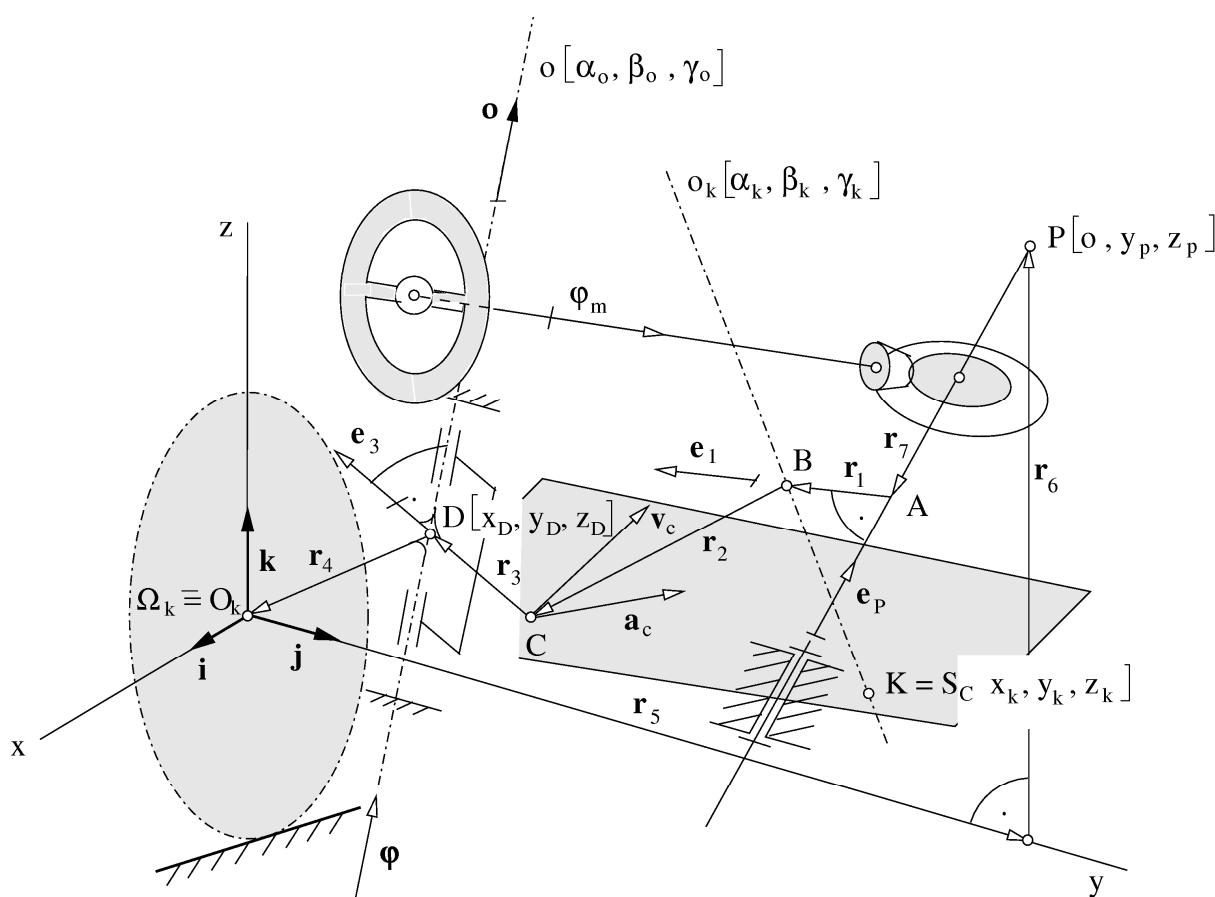
Pro řešení syntézy mechanismu řízení budeme předpokládat, že mechanismus zavěšení kola je na rámu vozidla nehybný a mění se pouze poloha členu zajišťujícího pohyb řídicí tyče, takže mechanismus řízení má jeden stupeň volnosti. Schéma mechanismu řízení s rotující hlavní pákou řízení je uvedeno na obr. 100. Uvedeme názvy jednotlivých členů soustavy řízení, které budeme používat

o osa rejdového čepu,

AB hlavní páka řízení, která se otáčí kolem p ,

BC spojovací tyč,

CD rameno řízení.



Obr. 100 Schema mechanismu řízení

V předcházející kapitole jsme provedli uložení kola a syntézou mechanismu zavěšení jsme určili osu o rejdového čepu. Podobně jako jsme určili kinematický stav bodu L , rov. (258), určíme i kinematický stav bodu C , ve kterém je spojovací tyč BC připojena k ramenu řízení DC a určíme střed křivosti S_c trajektorie bodu C , který pro další řešení přeznačíme na K a sestrojíme v něm osu o_k , kolmou na rovinu τ proloženou vektory $\mathbf{v}_c, \mathbf{a}_c$. Nyní můžeme přistoupit k vlastní syntéze mechanismu řízení. Pro zjednodušení uvažujeme, že osa talířového kola leží v rovině yz . Úkolem je navrhnout mechanismus řízení kola s požadovanou závislostí $\varphi = \varphi(\varphi_m)$, rov. (267), jestliže je dáno:

$O_K \equiv \Omega_K, K[x_K, y_K, z_K], o_k[\alpha_k, \beta_k, \gamma_k], o[\alpha_o, \beta_o, \gamma_o], D[x_D, y_D, z_D]$. Dalším požadavkem je, aby bod B , ve kterém je páka řízení AB napojena na spojovací tyč BC , ležel v poloze řídicího mechanismu pro přímou jízdu, na ose o_k . Řešení provedeme v souřadnicovém systému $R \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Použitím vektorové metody můžeme psát

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_5 + \mathbf{r}_6 + \mathbf{r}_7 = 0 \quad (271)$$

Rozepsáním rov. (271) do složek dostaneme

$$\begin{aligned} l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3 + l_4 \cos \alpha_4 + l_5 \cos \alpha_5 + l_6 \cos \alpha_6 + l_7 \cos \alpha_7 &= 0, \\ l_1 \cos \beta + l_2 \cos \beta_2 + l_3 \cos \beta_3 + l_4 \cos \beta_4 + l_5 \cos \beta_5 + l_6 \cos \beta_6 + l_7 \cos \beta_7 &= 0, \\ l_1 \cos \gamma + l_2 \cos \gamma_2 + l_3 \cos \gamma_3 + l_4 \cos \gamma_4 + l_5 \cos \gamma_5 + l_6 \cos \gamma_6 + l_7 \cos \gamma_7 &= 0. \end{aligned} \quad (272)$$

Pro každé natočení řídicí páky φ_m musí platit

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_{10} = \cos \varphi_m, \quad (273)$$

kde \mathbf{e}_{10} je jednotkový vektor hlavní páky řízení pro přímou jízdu, takže je

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_{10} + \cos \beta_1 \cos \beta_{10} + \cos \gamma_1 \cos \gamma_{10} = \cos \varphi_m. \quad (274)$$

Dále platí podmínka kolmosti osy p a hlavní páky řízení, obr. 101

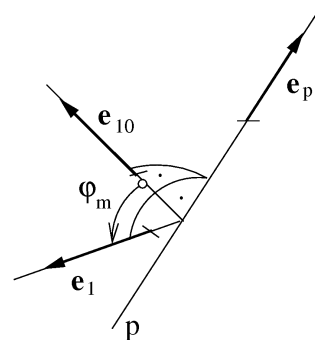
$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_p = 0, \quad (275)$$

takže po dosazení za jednotkové vektory dostaneme

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_p + \cos \beta_1 \cos \beta_p + \cos \gamma_1 \cos \gamma_p = 0, \quad (276)$$

a z trigonometrie je

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1. \quad (277)$$



Obr. 101 Kolmost jednotkových vektorů hlavní páky řízení a osy p

Platí rovněž podmínka kolmosti osy rejdového čepu o a ramene řízení r_3

$$\mathbf{o} \cdot \mathbf{r}_3 = 0, \quad (278)$$

takže po dosazení dostaneme

$$\cos \alpha_3 \cos \alpha_0 + \cos \beta_3 \cos \beta_0 + \cos \gamma_3 \cos \gamma_0 = 0, \quad (279)$$

a opět platí trigonometrické podmínky

$$\cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 = 1, \quad \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1. \quad (279)$$

Pro natočení nosiče kola kolem osy rejdového čepu platí

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_{30} = \cos \varphi_3 \wedge \varphi_3 \equiv \varphi \quad (280)$$

a po dosazení

$$\cos \alpha_3 \cos \alpha_{30} + \cos \beta_3 \cos \beta_{30} + \cos \gamma_3 \cos \gamma_{30} = \cos \varphi_3. \quad (281)$$

Protože $B \in o_k$, platí

$$\begin{aligned} x_B &= l_1 \cos \alpha_1 + l_7 \cos \alpha_p, \\ y_B &= l_5 - l_7 \cos \beta_p - l_1 \cos \beta_1, \\ z_B &= l_6 - l_7 \cos \gamma_p - l_1 \cos \gamma_1. \end{aligned} \quad (283)$$

Souřadnice bodu B musí vyhovovat rovnici přímky o_k pro přímou jízdu vozidla, takže je

$$\frac{x_B - x_K}{\cos \alpha_M} = \frac{y_B - y_K}{\cos \beta_M} = \frac{z_B - z_K}{\cos \gamma_M}, \quad (284)$$

a po dosazení máme

$$\begin{aligned} \frac{l_1 \cos \alpha_1 + l_7 \cos \alpha_p - x_M}{\cos \alpha_M} &= \frac{l_5 \cos \beta_p + l_1 \cos \beta_1 - y_M}{\cos \beta_M}, \\ \frac{l_1 \cos \alpha_1 + l_7 \cos \alpha_p - x_M}{\cos \alpha_M} &= \frac{l_6 - l_7 \cos \gamma_p - l_1 \cos \gamma_1}{\cos \gamma_M}. \end{aligned} \quad (284)$$

Vztahy (272), (274), (276), (277), (279), (280), (282) a (285) dávají celkem 12 rovnic k řešení. Jestliže za vstupní hodnoty vezmeme $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p, x_D, y_D, z_D, \alpha_o, \beta_o, \gamma_o, x_K, y_K, z_K, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \alpha_4, \beta_4, \gamma_4, l_4$ zbývá z celkového počtu 21 parametrů ($l_1, l_2, l_3, l_5, l_6, l_7, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_{10}, \beta_{10}, \gamma_{10}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \alpha_{30}, \beta_{30}, \gamma_{30}$) 9 volných parametrů, ale pro úhly $\alpha_{10}, \beta_{10}, \gamma_{10}, \alpha_{30}, \beta_{30}, \gamma_{30}$ platí dvě trigonometrické podmínky $\sum_{i=1}^3 \cos^2 \lambda_{io} = 1 \wedge \lambda \in (\alpha, \beta, \gamma)$,

takže k dispozici je celkem 7 volitelných parametrů pro zvolené úhly φ_m, φ . Možný postup výpočtu můžeme nastínit takto:

1. zvolíme φ_m, φ ,
2. odhadneme konstrukční parametry,
3. určíme neznámé veličiny a $\tilde{\varphi}$,
4. určíme odchylku $w(\varphi_m)(\varphi - \tilde{\varphi})^2$,
5. měníme konstrukční parametry a výpočet opakujeme (s použitím samostatné optimalizační metody),
6. výpočet opakujeme pro další φ_m, φ .